Universität Ulm

Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Attila Klimmek

Abgabe: Mittwoch, 07.12.2016

Wintersemester 2016/17
Punktzahl: 18

Übungen Lineare Algebra 1: Blatt 7

30. Betrachten Sie die Vektoren (3)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^3$ und bestimmen Sie die Dimension von $\mathcal{LH}(\{v_1, ..., v_4\})$.

31. Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n,n}$. Wir setzen $A^0 := E \in K^{n,n}$ und für jedes $k \in \mathbb{N}$ definieren wir A^k als das k-fache Produkt von A mit sich selbst. (4)

Die Matrix A heißt *nilpotent*, falls es eine natürliche Zahl k mit der Eigenschaft $A^k = 0$ gibt. Zeigen Sie: Ist A nilpotent, so gilt $\operatorname{rg} A < n$.

Tipp: Betrachten Sie das kleinste $k \in \mathbb{N}$, für welches $A^k = 0$ gilt.

32. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Die Matrix A heißt *symmetrisch*, falls $A^T = A$ gilt; sie heißt *anti-symmetrisch*, falls $A^T = -A$ gilt. Es bezeichne $\mathbb{R}^{n,n}_{\text{sym}}$ die Menge aller symmetrischen Matrizen und $\mathbb{R}^{n,n}_{\text{as}}$ die Menge aller anti-symmetrischen Matrizen in $\mathbb{R}^{n,n}$. (2+2+2)

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^{n,n}_{\text{sym}}$ und $\mathbb{R}^{n,n}_{\text{as}}$ Untervektorräume von $\mathbb{R}^{n,n}$ sind.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^{n,n} = \mathbb{R}^{n,n}_{\text{sym}} \oplus \mathbb{R}^{n,n}_{\text{as}}$ gilt.

(c) Bestimmen Sie die Dimensionen von $\mathbb{R}^{n,n}_{\text{sym}}$ und $\mathbb{R}^{n,n}_{\text{as}}$.

33. Sei nun $n \in \mathbb{N}$. Für jede Permutation $\sigma \in S_n$ definieren wir eine Matrix $A_\sigma \in \mathbb{R}^{n,n}$, deren Einträge $(A_\sigma)_{jk}$ durch $(A_\sigma)_{jk} := \delta_{\sigma(j)k}$ für alle $j, k \in \{1, ..., n\}$ gegeben sind. (2+3)

(a) Zeigen Sie, dass $A_{\sigma \circ \tau} = A_\tau A_\sigma$ für alle $\sigma, \tau \in S_n$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $A_\sigma \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ für alle $\sigma \in S_n$ gilt und dass die Abbildung

$$\Psi : \; S_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \quad \sigma \mapsto A_\sigma^{-1}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.