UNIVERSITÄT ULM

Abgabe: Mittwoch, 18.01.2017

Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Attila Klimmek
Wintersemester 2016/17
Punktzahl: 24

Übungen Lineare Algebra 1: Blatt 11

48. Sei K ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}$. Es seien zwei Basen $v_1, ..., v_m$ und $w_1, ..., w_m$ von K^m sowie zwei Basen $x_1, ..., x_n$ und $y_1, ..., y_n$ von K^n gegeben. Zudem sei $T : K^m \to K^n$ eine lineare Abbildung mit Darstellungsmatrizen (5)

$$A = A(T; v_1, ..., v_m; x_1, ..., x_n) \in K^{n,m} \quad \text{und} \quad B = B(T; w_1, ..., w_m; y_1, ..., y_n) \in K^{n,m}.$$

Wir setzen $V := (v_1, ..., v_m) \in K^{m,m}$ und $W := (w_1, ..., w_m) \in K^{m,m}$ sowie $X := (x_1, ..., x_n) \in K^{n,n}$ und $Y := (y_1, ..., y_n) \in K^{n,n}$.

Zeigen Sie, dass $B = Y^{-1} X \, A \, V^{-1} W$ gilt.

49. Betrachten Sie die beiden Basen v_1, v_2, v_3 und w_1, w_2, w_3 des $\mathbb{R}^3$, welche gegeben sind durch (3)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\text{und} \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Sei $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung, deren Darstellungsmatrix $A = A(T; v_1, v_2, v_3; v_1, v_2, v_3)$ bezüglich der Basis v_1, v_2, v_3 durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Berechnen Sie die Darstellungsmatrix $B = B(T; w_1, w_2, w_3; w_1, w_2, w_3)$ von T bezüglich der Basis w_1, w_2, w_3.

50. Für $n \in \mathbb{N}_0$ bezeichne Π_n wie in der Vorlesung den Vektorraum aller Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad $\leq n$. Betrachten Sie in Π_2 die Basis $1, x, x^2$ und in Π_4 die Basis $1, x, x^2, x^3, x^4$. Berechnen Sie die Darstellungsmatrizen der folgenden beiden Abbildungen bezüglich der gerade genannten Basen:

(a) $T : \Pi_2 \to \Pi_4$, $Tp(x) = x^2 p(x)$. (2)

(b) $T : \Pi_4 \to \Pi_4$, $Tp(x) = p''(x) - p(x)$. (2)

Hierbei bezeichnet $p''(x)$ die *zweite Ableitung* von $p(x)$, die so berechnet wird, wie Sie es aus der Schule kennen.

51. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum von V. Für zwei Vektoren $v_1, v_2 \in V$ definieren wir $v_1 \sim v_2$ genau dann, wenn $v_2 - v_1 \in U$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf V ist. (2)

(b) Sei $v \in V$; laut Vorlesung ist die Äquivalenzklasse von v bezüglich $\sim$ definiert als die Menge $\{w \in V : w \sim v\}$. Wir definieren zudem $v + U := \{v + u : u \in U\}$. (2)
Zeigen Sie, dass die Äquivalenzklasse von v gleich $v + U$ ist.

(c) Nur für diese Teilaufgabe sei $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$ und $U = \{v \in \mathbb{R}^2 : v_1 = 0\}$. Skizzieren Sie die Äquivalenzklassen einiger Elemente von V. (2)

(d) Es bezeichne V/U die Menge aller Äquivalenzklassen der Relation $\sim$, d.h. es sei (2)

$$V/U := \Big\{ \{w \in V : w \sim v\} \Big| \, v \in V \Big\} = \Big\{ v + U \Big| \, v \in V \Big\}.$$

Wir definieren zwei Abbildungen $\oplus : V/U \times V/U \to V/U$ und $\odot : K \times V/U \to V/U$ folgendermaßen: Für $v_1 + U, v_2 + U \in V/U$ und $\lambda \in K$ sei

$$(v_1 + U) \oplus (v_2 + U) := (v_1 + v_2) + U,$$
$$\lambda \odot (v_1 + U) := (\lambda v_1) + U.$$

Bei der Definition von $\odot$ gibt es jedoch ein Problem: Es kann verschiedene Vektoren $v_1, \tilde{v}_1$ geben, welche dieselbe Äquivalenzklasse haben, d.h. für welche $v_1 + U = \tilde{v}_1 + U$ gilt. Die obige Definition von $\lambda \odot (v_1 + U)$ hängt nun aber von v_1 ab; damit die Definition Sinn ergibt, muss sie dasselbe Ergebnis liefern, wenn wir v_1 durch irgend ein $\tilde{v}_1$ ersetzen, für welches $v_1 + U = \tilde{v}_1 + U$ gilt. Bevor man die Definition von $\odot$ verwenden darf, muss man zeigen, dass dies tatsächlich erfüllt ist („Man muss zeigen, dass $\odot$ wohldefiniert ist").

Dasselbe Problem taucht auch bei der Definition von $\oplus$ auf.

Zeigen Sie: $\oplus$ und $\odot$ sind wohldefiniert, d.h.: Sind $v_1, \tilde{v}_1 \in V$ sowie $v_2, \tilde{v}_2 \in V$ und ist $v_1 + U = \tilde{v}_1 + U$ sowie $v_2 + U = \tilde{v}_2 + U$, so gilt

$$(v_1 + v_2) + U = (\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2) + U \quad \text{und} \quad (\lambda v_1) + U = (\lambda \tilde{v}_1) + U.$$

(e) Zeigen Sie: $(V/U, \oplus, \odot)$ ist ein Vektorraum über K. (4)