Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 25.01.2017

Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Attila Klimmek
Wintersemester 2016/17
Punktzahl: 24

Übungen Lineare Algebra 1: Blatt 12

52. (a) Berechnen Sie alle Eigenwerte sowie die zugehörigen Eigenräume der folgenden Matrizen: (6)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4,4}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2}$$

Welche der Matrizen A, B und C sind diagonalisierbar?

(b) Sei $(x_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen, die der Rekursionsvorschrift (3)

$$x_{m+1} = 3x_m - 2x_{m-1} \qquad \text{für alle } m \in \mathbb{N}$$

genügt. Bestimmen Sie eine explizite Formel für x_m ($m \in \mathbb{N}$) in Abhängigkeit von x_0 und x_1.

53. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Für jedes Polynom p mit komplexen Koeffizienten ist $p(A)$ definiert wie in Aufgabe 27 auf Blatt 6.

(a) Zeigen Sie: Sind p, q Polynome mit komplexen Koeffizienten, so gilt $(pq)(A) = p(A)q(A)$. (2)

(b) Folgern Sie aus (a): Ist $m \in \mathbb{N}$ und sind $p_1, ..., p_m$ Polynome mit komplexen Koeffizienten, so gilt $(p_1 \cdots p_m)(A) = p_1(A) \cdots p_m(A)$. (1)

(c) Für jedes $B \in \mathbb{C}^{n,n}$ nennen wir die Menge $\sigma(B) := \{\lambda \in \mathbb{C} |\, \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } B\}$ das *Spektrum* von B. Zeigen Sie, dass (5)

$$\sigma(p(A)) = \{p(\lambda) |\, \lambda \in \sigma(A)\}$$

gilt (diese Aussage bezeichnet mit üblicherweise als *Spektralen Abbildungssatz*).

Hinweis: Die Inklusion „$\supseteq$“ ist relativ einfach zu zeigen. Tipp für die umgekehrte Inklusion: Definieren Sie für $\mu \in \sigma(p(A))$ ein Polynom q durch $q(x) = p(x) - \mu$ und wenden Sie den Fundamentalsatz der Algebra auf q an.

54. (a) Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in K^{n,n}$. Wir sagen, dass A und B *kommutieren*, wenn $AB = BA$ gilt. Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A. (1)

Zeigen Sie: Wenn A und B kommutieren, dann lässt B den Eigenraum $\mathrm{Eig}_A(\lambda)$ invariant, d.h. für alle $x \in \mathrm{Eig}_A(\lambda)$ gilt auch $Bx \in \mathrm{Eig}_A(\lambda)$.

(b) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass die Aussage aus Teilaufgabe (a) im Allgemeinen falsch ist, wenn A und B nicht kommutieren. (2)

55. Sei $n \in \mathbb{N}$.

(a) Sei K ein Körper und $A \in K^{n,n}$. Zeigen Sie, dass A und A^T dieselben Eigenwerte haben. (2)

(b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine Matrix mit Einträgen a_{jk} ($j, k \in \{1, ..., n\}$). Die Matrix A heißt *zeilenstochastisch*, wenn alle Einträge von A größer oder gleich 0 sind und wenn $\sum_{k=1}^n a_{jk} = 1$ für alle $j \in \{1, ..., n\}$ gilt; sie heißt *spaltenstochastisch*, wenn alle Einträge von A größer oder gleich 0 sind und wenn $\sum_{j=1}^n a_{jk} = 1$ für alle $k \in \{1, ..., n\}$ gilt. (2)

Zeigen Sie: Jede zeilenstochastische und jede spaltenstochastische Matrix in $\mathbb{R}^{n,n}$ besitzt den Eigenwert 1.