Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 01.02.2017

Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Attila Klimmek
Wintersemester 2016/17
Punktzahl: 19

Übungen Lineare Algebra 1: Blatt 13

56. Sei V ein Vektorraum über $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und sei $\langle \cdot, \cdot, \rangle : V \times V \to K$ ein Skalarprodukt auf V.

(a) Seien $v, w \in V$ und $v \perp w$. Zeigen Sie, dass $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ gilt. (1)

(b) Nur für diese Teilaufgabe nehmen wir an, dass $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^2$ gilt und dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das kanonische Skalarprodukt ist. Skizzieren Sie, was die Aussage aus Teilaufgabe (a) in dieser Situation bedeutet. (1)

(c) Seien $v, w \in V$. Zeigen Sie die sogenannte *Parallelogram-Gleichung*: $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$. (2)

(d) Warum nennt man die Gleichung aus Teilaufgabe (c) Parallelogramm-Gleichung? (1)

57. Betrachten Sie die beiden Vektoren $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^4$, die durch

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben sind.

(a) Zeigen Sie, dass w_1, w_2 ein Orthonormalsystem in $\mathbb{R}^4$ ist. (1)

(b) Finden Sie Vektoren $w_3, w_4 \in \mathbb{R}^4$ derart, dass w_1, w_2, w_3, w_4 eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^4$ ist. (6)

Tipp: Definieren Sie $v_1 := w_1$, $v_2 := w_2$ und $v_{2+k} = e_k$ für alle $k \in \{1, ..., 4\}$ (wobei $e_k \in \mathbb{R}^4$ derjenige Vektor ist, der an der k-ten Stelle eine Eins und ansonsten nur Nullen enthält) und wenden Sie dann das Gram-Schmidtsche Orthgonalisierungsverfahren an.

58. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ und sei $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to K$ ein Skalarprodukt.

(a) Seien $v, w \in V$. Zeigen Sie die sogenannte *Polarisationsgleichung*: (4)

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} (-i)^k \langle v + i^k w, v + i^k w \rangle.$$

(b) Es bezeichne wie üblich $\| \cdot \|$ die mit Hilfe des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definierte Norm. Sei nun $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{neu}} : V \times V \to \mathbb{C}$ ein weiteres Skalarprodukt auf V und bezeichne $\| \cdot \|_{\text{neu}}$ die zugehörige Norm. (3)

Zeigen Sie: Es gilt $\|v\| = \|v\|_{\text{neu}}$ for alle $v \in V$ genau dann, wenn $\langle v, w \rangle = \langle v, w \rangle_{\text{neu}}$ für alle $v, w \in V$ gilt.