Universität Ulm

Besprechung:
Mittwoch, 15.02.2017

Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Attila Klimmek
Wintersemester 2016/17
Punktzahl: 22*

Übungen Lineare Algebra 1: Blatt 15

63. Sei $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ eine normale Matrix und sei $r(A) := \max\{|\lambda| : \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A\}$. Zeigen Sie, dass (4)

$$r(A) = \max\{\|Ax\| : x \in \mathbb{C}^n \text{ mit } \|x\| \leq 1\}$$

gilt.

64. Beweisen oder widerlegen Sie: (8)

(a) Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist $A^T A$ symmetrisch und positiv semidefinit.

(b) Jede unitäre Matrix $U \in \mathbb{C}^{n,n}$ ist diagonalisierbar.

(c) Jede invertierbare symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist positiv semidefinit.

(d) Besitzt eine hermitesche Matrix $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ nur den Eigenwert 0, so gilt $A = 0$.

(e) Jede normale Matrix $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ist hermitesch.

(f) Jede negativ definite symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist invertierbar.

(g) Die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

besitzt nur reelle Eigenwerte, und all diese Eigenwerte sind kleiner oder gleich -2.

(h) Sind $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch, so ist auch AB symmetrisch.

65. Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch und negativ semidefinit. Zeigen Sie: Es gibt eine symmetrische und negativ semidefinite Matrix $B \in \mathbb{R}^{n,n}$, für welche $B^3 = A$ gilt. (2)

66. Betrachten Sie die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}.$$

(a) Zeigen Sie, dass A normal ist. (1)

(b) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix $\Lambda \in \mathbb{C}^{3,3}$ und eine unitäre Matrix $U \in \mathbb{C}^{3,3}$ derart, dass $A = U\Lambda\overline{U}^T$ gilt. (3)

67. Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch. Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ definieren wir $\langle x, y\rangle_A := \langle x, Ay\rangle$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Zeigen Sie: (4)

Es ist $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ genau dann ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$, wenn A positiv definit ist.

Bemerkung: Die Implikation „$\Leftarrow$“ wurde in der Vorlesung bereits im Abschnitt über Skalarprodukte erwähnt, aber nicht bewiesen.