Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Attila Klimmek
Wintersemester 2016/17
Punktzahl: 23

Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 30.11.2016

Übungen Lineare Algebra 1: Blatt 6

25. (2+2)

(i) Seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & 4 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie, falls möglich, die Produkte $AB,\ BA,\ C^TC,\ CC^T$.

(ii) Seien

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad F = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie $\left(F^T D F\right)^{10}$.

26. Sei K ein Körper. Für quadratische Matrizen $A = (a_{ij}) \in K^{n,n}$ definieren wir die Spur (engl: *trace*) von A durch (5)

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(i) Für $A, B \in K^{n,n}$ und $\lambda,\ \mu \in K$ gilt $\operatorname{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \operatorname{tr}(A) + \mu \operatorname{tr}(B)$.

(ii) Für $A \in K^{n,n}$ gilt $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^T)$.

(iii) Für $A \in K^{m,n}$ gilt $\operatorname{tr}(AA^T) = 0$ genau dann, wenn $A = 0$.

(iv) Für $A \in K^{m,n},\ B \in K^{n,m}$ gilt $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

(v) Es existieren Matrizen $A, B \in K^{n,n}$ mit $AB - BA = E$.

27. Seien K ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}$. Für ein Polynom $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ mit $a_0, \ldots, a_n \in K$ vom Grad n und einer quadratischen Matrix $A \in K^{m,m}$ definieren wir die Matrix $p(A)$ durch (2)

$$p(A) = a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 E.$$

Man beweise, dass es immer ein Polynom p gibt, welches nicht das Nullpolynom ist, und welches $p(A) = 0$ erfüllt.

28. Sei K ein Körper, $A = (a_1, \ldots, a_n) \in K^{m,n}$ eine Matrix mit Spaltenvektoren $a_1, \ldots, a_n \in K^m$. Sei $i \in \{1, \ldots, m\}$. (2+2)

(i) Definiere für $j = 1, \ldots, n$ und $\lambda \in K \setminus \{0\}$

$$\tilde{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ \lambda a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: Die Vektoren $a_1, \ldots, a_n$ sind genau dann linear unabhängig, wenn $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n$ linear unabhängig sind.

(ii) Definiere für $j = 1, \dots, n$, $\nu \in \{1, \dots, m\}$, $\nu \neq i$ und $\lambda \in K$

$$b_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} + \lambda a_{\nu j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: Die Vektoren $a_1, \dots, a_n$ sind genau dann linear unabhängig, wenn $b_1, \dots, b_n$ linear unabhängig sind.

29. Seien $A \in \mathbb{R}^{m,p}$ und $B \in \mathbb{R}^{p,n}$, $m, n, p, q, r, s \in \mathbb{N}$, und (3+3+2)

$$m = m_1 + \dots + m_q,\ n = n_1 + \dots + n_r,\ p = p_1 + \dots + p_s, \qquad m_1, \dots, m_q, n_1, \dots, n_r, p_1 \dots, p_s \in \mathbb{N}.$$

(i) Seien

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_q \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & B_r \end{pmatrix}, \qquad \text{wobei } A_\alpha \in \mathbb{R}^{m_\alpha, p},\ B_\beta \in \mathbb{R}^{p, n_\beta},$$

$\alpha \in \{1, \dots, q\}$, $\beta \in \{1, \dots, r\}$.

Zeigen Sie, dass $AB = \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{q1} & \dots & C_{qr} \end{pmatrix}$, mit $C_{\alpha\beta} = A_\alpha B_\beta$.

(ii) Seien

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_s \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_s \end{pmatrix}, \qquad \text{wobei } A_\gamma \in \mathbb{R}^{m, p_\gamma},\ B_\gamma \in \mathbb{R}^{p_\gamma, n},$$

$\gamma \in \{1, \dots, s\}$. Zeigen Sie, dass $AB = \sum_{\gamma=1}^{s} A_\gamma B_\gamma$.

(iii) Seien nun

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{q1} & \dots & A_{qs} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \dots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \dots & B_{sr} \end{pmatrix}, \qquad \text{wobei } A_{\alpha\gamma} \in \mathbb{R}^{m_\alpha, p_\gamma},\ B_{\gamma\beta} \in \mathbb{R}^{p_\gamma, n_\beta},$$

$\alpha \in \{1, \dots, q\}$, $\beta \in \{1, \dots, r\}, \gamma \in \{1, \dots, s\}$.
Nutzen Sie die Ergebnisse aus den Aufgabenteilen (i) und (ii) um zu zeigen, dass

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{q1} & \dots & C_{qr} \end{pmatrix},$$

mit $C_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^{s} A_{\alpha\gamma} B_{\gamma\beta}$.