Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 14.12.2016

Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Attila Klimmek
Wintersemester 2016/17
Punktzahl: 21

Übungen Lineare Algebra 1: Blatt 8

34. Berechnen Sie die inverse Matrix von (4)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{10,10}.$$

35. Wir beschäftigen uns in der nächsten Aufgabe mit dem folgenden Problem: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar mit inverser Matrix A^{-1}. Nun wird ein Eintrag der Matrix A verändert. Wir bezeichnen diese neue Matrix mit B und nehmen an, dass auch diese invertierbar ist. Muß nun die Inverse von B komplett neu berechnet werden, oder kann dies unter Verwendung von A^{-1} vermieden werden? (3+2)

(i) Beweisen Sie die folgende Aussage: Sei $A \in R^{n\times n}$ invertierbar und $u, v \in \mathbb{R}^n$ derart, dass $1 + v^T A^{-1} u \neq 0$. Dann ist auch $A + uv^T$ invertierbar und es gilt

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u}.$$

(ii) Berechnen Sie die Inverse Matrix von

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

36. Seien im Folgenden $A \in \mathbb{R}^{m,n}, b \in \mathbb{R}^m$. Finden Sie jeweils die Menge aller $x \in \mathbb{R}^n$, sodass $Ax = b$ gilt. (3+3)

(i) $A = \begin{pmatrix} a & 4 & a \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & a & 6 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, wobei $a \in \mathbb{R}$.

(ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,5}$ und $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

37. Sei K ein Körper und $A \in K^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Ist A nilpotent, so gilt $\det A = 0$. (2)

38. Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt *orthogonal*, falls $A^T A = E$ gilt. Zeigen Sie die folgenden Aussagen: (2+2)

(i) Ist A orthogonal, so gilt $|\det A| = 1$.

(ii) Die Menge der orthogonalen Matrizen bildet bezüglich der Matrizenmultiplikation eine Gruppe.