Universität Ulm

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Alle Aussagen sind zu begründen!

Dr. Gerhard Baur
Dr. Jochen Glück
Attila Klimmek
Wintersemester 2016/17
Punktzahl: 100

Erste Klausur zur Linearen Algebra 1: Lösung

1. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen: (6×5)

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Menge aller ungeraden Permutationen in S_n ist eine Untergruppe von $(S_n, \circ)$ (wobei $\circ$ wie üblich die Hintereinanderausführung von Permutationen bezeichnet).

Lösung: Die Aussage ist falsch.

Erste Möglichkeit: Die Identität ϵ ist eine gerade Permutation. Also liegt das neutrale der Gruppe S_n nicht in der Menge aller ungerade Permutationen.

Zweite Möglichkeit: Die Abbildung $\sigma \mapsto \operatorname{sgn}\sigma$ ist ein Gruppenhomomorphismus von S_n nach $\{-1, 1\}$. Für zwei ungerade Permutationen σ, τ ist daher $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = (-1)\cdot(-1) = 1$. Somit ist $\sigma \circ \tau$ keine ungerade Permutation. Daher ist diese Menge nicht abgeschlossen bezüglich der Verknüpfung und daher keine Untergruppe von S_n.

(b) Sei V ein Vektorraum über einen Körper K. Sind $u, v \in V$ linear unabhängig, so sind auch $u, u + v$ linear unabhängig.

Lösung: Die Aussage ist richtig. Da u, v linear unabhängig sind, folgt aus $\mu_1 u + \mu_2 v = 0$, dass $\mu_1 = \mu_2 = 0$ gilt, wobei $\mu_1, \mu_2 \in K$. Seien nun $a, b \in K$ mit $0 = au + b(u + v) = (a + b)u + bv$. Nach der Vorbemerkung gilt dann $b = 0$ und $a + b = a = 0$. Somit sind $u, u + v$ linear unabhängig.

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Ist A^2 invertierbar, so ist auch A invertierbar.

Lösung: Die Aussage ist richtig. Nach dem Determinantenmultiplikationssatz und wegen der Invertierbarkeit von A^2 gilt $0 \neq \det A^2 = (\det A)^2$. Daher ist auch $\det A \neq 0$ und daher ist A invertierbar.

(d) Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}$ ist diagonalisierbar.

Lösung: Die Aussage ist richtig. Besitzt eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ genau n verschiedene Eigenwerte, so ist A diagonalisierbar. Die Eigenwerte einer Dreiecksmatrix sind gerade die Diagonalelemente, die in diesem Fall alle verschieden sind. Daher ist A diagonalisierbar.

(e) Sei $n \in \mathbb{N}$, seien V und W Vekorräume über $\mathbb{R}$ und sei $T : V \to W$ linear und surjektiv. Wenn für Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ die Gleichheit $\mathcal{LH}(v_1, \ldots, v_n) = V$ gilt, dann ist $\mathcal{LH}(Tv_1, \ldots, Tv_n) = W$.

Lösung: Die Aussage ist richtig. Sei $w \in W$ beliebig. Wegen der Surjektivität gibt es $v \in V$ mit $Tv = w$.(1) Nach Annahme gibt es Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ mit $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$. (1). Wegen der Linearität von T gilt

$$w = Tv = \sum_{i=1}^n \lambda_i T v_i. \qquad (2)$$

Dies bedeutet gerade, dass $w \in \mathcal{LH}(Tv_1, \ldots, Tv_n)$. (1)

(f) Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Menge der unitären Matrizen in $\mathbb{C}^{n,n}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{C}^{n,n}$.

Lösung: Die Aussage ist falsch.

Erste Möglichkeit: Die Einheitsmatrix E ist unitär, aber $2E$ ist nicht unitär wegen $\overline{2E}^T 2E = 4E \neq E$.

Zweite Möglichkeit: Die Nullmatrix ist nicht unitär, muss aber in jedem Untervektorraum von $\mathbb{C}^{n,n}$ enthalten sein.

2. Sei $t \in \mathbb{R}$ fest und seien die Vektoren $v_1, v_2, v_3, v \in \mathbb{R}^3$ durch (8)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} -6t \\ t^2 + 2t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

gegeben.

Zeigen Sie, dass es eindeutig bestimmte Skalare $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ gibt, für welche $v = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k v_k$ gilt, und berechnen Sie diese Skalare in Abhängigkeit von t.

Lösung:

Erste Möglichkeit: Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -7 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ die durch die Spaltenvektoren v_1, v_2, v_3 aufgespannte Matrix. Die Gleichung $v = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k v_k$ ist äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -7 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = v. \qquad (1)$$

Ist die Matrix A invertierbar, so gibt es eindeutig bestimmte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ wie gewünscht (1) und es gilt

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = A^{-1} v \qquad (1).$$

Man sieht, dass $\det A = -2 \neq 0$ gilt, also ist A invertierbar (1) und somit existieren für alle v solche eindeutigen Skalare.

Zur Berechnung von A^{-1}: Mit Gauß sieht man, dass

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -2 & -7 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt. (3)

Somit ist

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -2 & -7 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6t \\ t^2 + 2t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -7t^2 - 2t \\ -3t^2 \end{pmatrix} \qquad (1).$$

Zweite Möglichkeit: Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -7 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ die durch die Spaltenvektoren v_1, v_2, v_3 aufgespannte Matrix. Die Gleichung $v = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k v_k$ ist äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -7 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = v. \qquad (1)$$

Wir wenden das Gauß-Verfahren an. Damit sieht man, dass die Gleichung in der vorangehenden Zeile eine eindeutige Lösung besitzt, also existieren eindeutig bestimmte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ mit der gewünschten Eigenschaft (2). Außerdem erhält man aus dem Gauß-Algorithmus

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -7t^2 - 2t \\ -3t^2 \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

3. Betrachten Sie die Matrix (8+6)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A sowie die dazu gehörigen Eigenräume. Ist A diagonalisierbar?

Lösung: Wir berechnen zuerst das charakteristische Polynom:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (2 - \lambda)\left((1 - \lambda)^2 - 1\right) = -(2 - \lambda)^2 \lambda. \qquad (1)$$

Daher sind die Eigenwerte 0 und 2. (1)
Eigenräume:

$$A - 0E \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Eig}_A(0) = \mathcal{LH}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right); \qquad (2)$$

$$A - 2E \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Eig}_A(2) = \mathcal{LH}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right). \qquad (2)$$

Weil die Summe der geometrischen Vielfachheien ist gleich 3, ist A diagonalisierbar. (2)
[Alternatives Argument: Für beide Eigenwerte stimmen algebraische und geometrische Vielfachheiten überein.]

(b) Berechnen Sie A^{10}.
Lösung: Sei

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Matrix der Eigenvektoren von A mit inverser Matrix

$$S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Es gilt

$$S^{-1}AS = D \Longleftrightarrow A = SDS^{-1}, \qquad \text{mit } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Somit ist

$$A^{10} = SD^{10}S^{-1} = S\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 512 & 512 & 0 \\ 0 & 0 & 1024 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 512 & 512 & 0 \\ 512 & 512 & 0 \\ 0 & 0 & 1024 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

(Von den drei Punkten in der vorangehenden Zeile: einen Punkt für die Formel für A^{10}, zwei Punkte für das richtige Ausrechnen.)

4. Betrachten Sie die folgenden Untervektorräume des $\mathbb{R}^4$: (10)

$$U = \mathcal{LH}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \qquad V = \mathcal{LH}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}.$$

Bestimmen Sie $\dim(U \cap V)$.
Lösung: Wir bezeichnen die Vektoren in den jeweiligen Aufspännen mit u_1, u_2 bzw. v_1, v_2, v_3. Offenbar sind u_1, u_2 linear unabhängig, wegen der Null und der 1 in den vierten Komponenten. Mit dem gleichen Argument sieht man direkt, dass v_1 und v_2 linear unabhängig sind. Jedoch sind v_1, v_3 linear abhhängig, da $v_3 = 2v_1$ gilt. Daher gilt $\dim U = \dim V = 2$. *(Insgesamt (4) Punkte. (2) für das Ergebnis und (2) für das saubere (!) Argumentieren.)*
Zur Berechnung von $\dim\,(U + V)$ betrachten wir $\mathcal{LH}(u_1, u_2, v_1, v_2)$. Da $v_2 = 2u_1$ gilt, kann der Vektor v_2 im Folgenden weggelassen werden.
Mit Gauss sieht man, dass die Matrix

$$(u_1|u_2|v_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rang Drei besitzt. Somit gilt $\dim\,(U + V) = 3$. *(Insgesamt (4) Punkte. (2) für das Ergebnis und (2) für das saubere (!) Argumentieren.)*
Mit der Dimensionsformel folgt

$$\dim\,(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim\,(U + V) = 2 + 2 - 3 = 1. \qquad (2)$$

5. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ unitär. Ferner sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A. Zeigen Sie, dass $|\lambda| = 1$ gilt. (7)

Erste Lösung: Sei $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ. Da A unitär ist, gilt $\overline{A}^T A = E$. (2) Daraus folgt

$$\langle x, x\rangle = \overline{x}^T x = \overline{x}^T Ex = \overline{x}^T \overline{A}^T Ax = (\overline{Ax})^T Ax = (\overline{\lambda x})^T \lambda x = |\lambda|^2 \langle x, x\rangle. \qquad (4)$$

Wegen $x \neq 0$ und damit $\langle x, x\rangle \neq 0$ folgt $|\lambda| = 1$. (1)

Zweite Lösung: Sei $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ. Da A unitär ist, gilt $\|Ax\| = \|x\|$.(2) Hieraus folgt

$$\|x\| = \|Ax\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|. \qquad (4)$$

Da $x \neq 0$ und damit $\|x\| \neq 0$ gilt, folgt $|\lambda| = 1$.(1)

6. Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. (5+5)

(a) Sei $U = \big\{A = (a_{jk}) \in \mathbb{R}^{n,n} | \, a_{jk} \geq 0 \text{ für alle } j, k \in \{1, ..., n\}\big\}$. Ist U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{n,n}$?

Lösung: Diese Menge ist kein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$(1): Die Einheitsmatrix $E \in U$, aber $-1 \cdot E$ ist kein Element von U(2). Daher ist U nicht abgeschlossen bezüglich der Skalarmultiplikation und kein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$.(2)

(b) Sei K ein Körper und sei $U = \{A \in K^{n,n} | \text{ tr } A = 0\}$. Ist U ein Untervektorraum von $K^{n,n}$?
Zur Erinnerung: Für eine Matrix $A = (a_{jk}) \in K^{n,n}$ ist tr A durch tr $A := \sum_{k=1}^n a_{kk}$ definiert.

Lösung: Diese Menge ist ein Untervektorraum.

Erste Möglichkeit: Sei $\lambda \in K$ und $A, B \in U$. Dann gilt nach Übung

$$\text{tr } (A + \lambda B) = \text{tr } A + \lambda \text{tr } B = 0 + \lambda \cdot 0 = 0.(3)$$

Somit ist $A + \lambda B \in U$. (1)
Ferner ist die Nullmatrix $0 \in U$.(1). Mit dem Unterraumkriterium folgt die Behauptung.

Zweite Möglichkeit: Nach der Übung ist die Abbildung tr $: K^{n,n} \to K$ linear (1) und die Menge U ist der Kern dieser Abbildung (2). Da der Kern einer linearen Abbildung ein Unterraum ist, folgt die Behauptung.(2)

7. Sei $n \in \mathbb{N}$, sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch und sei die lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch $T(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gegeben. (7)

Zeigen Sie: Jeder Vektor aus dem Bild von T steht (bezüglich des kanonischen Skalarproduktes) senkrecht auf jedem Vektor aus dem Kern von T.

Lösung: Sei $z \in \text{Im } T$ und $y \in \ker T$. Dann gibt es ein $x \in \mathbb{R}^n$ derart, dass $z = Tx = Px$.(2) Daraus folgt

$$\langle y, z\rangle = \langle y, Px\rangle = y^T Px = y^T P^T x = (Py)^T x = 0^T x = 0. \qquad (5)$$

Somit gilt $z \perp y$.

8. Es sei die lineare Abbildung (3+6+5)

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x + y + 3z \\ x + z \\ 2x - 2y - 6z \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass T den Rang 2 besitzt.

Lösung: Nach Vorlesung besitzen T und die Darstellungsmatrix $B = B(T; e_1, e_2, e_3; e_1, e_2, e_3)$ den gleichen Rang. Es gilt

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -6 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Durch Vergleich der zweiten Einträge des ersten und zweiten Zeilenvektors sieht man, dass diese Zeilenvektoren linear unabhängig sind. Die dritte Zeile ist das -2-fache der ersten Zeilse. Somit besitzt A Zeilenrang 2 und damit Rang 2.(2)

(b) Bestimmen Sie eine Basis b_1, b_2 des Bildes von T und ergänzen Sie diese zu einer Basis b_1, b_2, b_3 des $\mathbb{R}^3$.

Lösung: Das Bild von T wird durch die Spaltenvektoren von B aufgespannt. Nach Aufgabe (a) ist das Bild von T zwei-dimensional und daher bilden zwei linear unabhängigen Spaltenvektoren der Darstellungsmatrix eine Basis von im T. (2)

Wir wählen als b_1 bzw b_2 die ersten beiden Spaltenvektoren von B. Diese sind wegen den jeweiligen Einträgen der zweiten Komponenten linear unabhängig.(1)

Als dritten Basisvektor wählen wir $b_3 = (0\ 1\ 1)^T$. Mit Gauss oder mit der Determinante sieht man, dass diese drei Vektoren linear unabhängig sind (die Studenten müssen dies zeigen!) (2) und daher eine Basis des dreidimensionalen $\mathbb{R}^3$ bilden. (1)

(c) Seien e_1, e_2, e_3 die kanonischen Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^3$ und seien $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}^3$ die Vektoren aus Teilaufgabe (b). Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $A = A(T; e_1, e_2, e_3; b_1, b_2, b_3)$ von T.

Lösung: Seien

$$b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} Te_1 &= 1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3 && (1) \\ Te_2 &= 0 \cdot b_1 + 1 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3 && (1) \\ Te_3 &= 1 \cdot b_1 + 4 \cdot b_3 + 0 \cdot b_3 && (2). \end{aligned}$$

Damit ist

$$A(T; e_1, e_2, e_3; b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$