Universität Ulm

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Alle Aussagen sind zu begründen!

Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Attila Klimmek
Wintersemester 2016/17
Punktzahl: 100

Lineare Algebra 1: Probeklausur

1. Falls nicht näher definiert sei in dieser Aufgabe stets K ein Körper, V ein Vektorraum über K und $n \in \mathbb{N}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen: (30)

(i) Jede Gruppe besitzt mindestens zwei Elemente.

(ii) Für $u, v \in V$ gilt $\mathcal{LH}(u, v) = \mathcal{LH}(u + v, v)$.

(iii) Sind $x, y \in \mathbb{R}^n$ linear abhängig, so gilt $x \cdot y = 0$.

(iv) Seien U_1, U_2 jeweils zwei-dimensionale Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$. Dann gilt $U_1 = U_2$.

(v) Sei $\dim V \geq 2$. Für jeden Vektor $u \in V$ gibt es einen Untervektorraum U von V, für den $u \in U$ und $U \neq V$ gilt.

(vi) Ist $(G, \circ)$ eine Gruppe und sind U_1 und U_2 Untergruppen von $(G, \circ)$, so ist auch $U_1 \cap U_2$ eine Untergruppe von $(G, \circ)$.

2. Betrachten Sie die folgenden Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$: (10)

$$U = \mathcal{LH}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right), \qquad V = \mathcal{LH}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}\right).$$

Bestimmen Sie $\dim(U + V)$ und $\dim(U \cap V)$.

3. Seien im $\mathbb{R}^4$ die Vektoren (15)

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\\2\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix}1\\-2\\0\\-2\end{pmatrix}, \quad u_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix}-1\\-2\\2\\3\end{pmatrix}$$

gegeben. Seien ferner $V = \mathcal{LH}(v_1, \ldots, v_4)$ und $U = \mathcal{LH}(u_1, u_2)$.

(i) Wählen Sie aus den Vektoren $v_1, \ldots, v_4$ eine Basis von V aus.

(ii) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^4 = V \oplus U$ gilt.

4. Sei K ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}$. Sei ferner $A \in K^{n,n}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen: (10)

(i) $\ker\left(A^m\right) \subset \ker\left(A^{m+1}\right)$.

(ii) $\operatorname{rg}\left(A^m\right) \geq \operatorname{rg}\left(A^{m+1}\right)$.

5. Seien (10)

$$A = \begin{pmatrix}2 & 3 & -1 & -9\\2 & 2 & 1 & 0\\-1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}, \qquad b = \begin{pmatrix}-16\\0\\8\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

gegeben. Finden Sie alle $x \in \mathbb{R}^4$ mit $Ax = b$.

6. Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade und sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ antisymmetrisch, d.h. es gelte $A^T = -A$. Zeigen Sie, dass $\det A = 0$ ist. (5)

7. Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K und U ein Untervektorraum von V. Zeigen Sie, dass es einen Untervektorraum W von V gibt, für den $V = U \oplus W$ gilt. (10)

8. Berechnen Sie für $t \in \mathbb{R}$ und (10)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & t \\ 1 & 4 & t^2 \end{pmatrix}$$

die Determinante $\det A$. Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für alle $b \in \mathbb{R}^3$ eindeutig lösbar?