Universität Ulm

Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Attila Klimmek

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Alle Aussagen sind zu begründen!

Wintersemester 2016/17
Punktzahl: 100

Lineare Algebra 1: Lösungsvorschlag zur Probeklausur

1. Falls nicht näher definiert sei in dieser Aufgabe stets K ein Körper, V ein Vektorraum über K und $n \in \mathbb{N}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen: (30)

(i) Jede Gruppe besitzt mindestens zwei Elemente.
Lösungsvorschlag: Die Aussage ist falsch. Das einfachste Gegenbeispiel ist $G = (\{0\}, +) \subset (\mathbb{R}, +)$. Dies ist eine Untergruppe (und damit selbst eine Gruppe) von $(\mathbb{R}, +)$, da $\{0\}$ nicht leer ist und für alle $x, y \in \{0\}$ gilt: $(-x) + y = -0 + 0 = 0 \in \{0\}$. Nach dem Untergruppenkriterium aus Aufgabe 12 folgt die Behauptung. $\square$

Bemerkung: In der Klausur ist natürlich nicht verlangt, dass Sie die Nummern der Übungsaufgaben parat haben. Die Nennung des Stichworts 'Untergruppenkriterium' reicht bereits.

(ii) Für $u, v \in V$ gilt $\mathcal{LH}(u, v) = \mathcal{LH}(u + v, v)$.
Lösungsvorschlag: Die Aussage ist korrekt: Sei zunächst $x \in \mathcal{LH}(u, v)$. Dann gibt es Skalare $\lambda, \mu \in K$, sodass

$$x = \lambda u + \mu v = \lambda u + \mu v + \lambda v - \lambda v = \lambda(u + v) + (\mu - \lambda)v \in \mathcal{LH}(u + v, v).$$

Ist umgekehrt $x \in \mathcal{LH}(u + v, v)$, so gibt es Skalare λ, μ mit

$$x = \lambda(u + v) + \mu v = \lambda u + (\lambda + \mu)v \in \mathcal{LH}(u, v).$$

Somit gilt $\mathcal{LH}(u, v) = \mathcal{LH}(u + v, v)$. $\square$

(iii) Sind $x, y \in \mathbb{R}^n$ linear abhängig, so gilt $x \cdot y = 0$.
Lösungsvorschlag: Die Aussage ist falsch: Sei $n = 1$ und setze $x = 1,\ y = 3$. Dann sind x und y linear abhängig, da zwei Vektoren in einem eindimensionalen Vektorraum stets linear abängig sind. Aber $x \cdot y = 3 \neq 0$. $\square$

Bemerkung: Im $\mathbb{R}^1$ stimmt das Skalarprodukt natürlich mit der üblichen Multiplikation überein; dies haben wir oben benutzt.

(iv) Seien U_1, U_2 jeweils zwei-dimensionale Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$. Dann gilt $U_1 = U_2$.
Lösungsvorschlag: Die Behauptung ist falsch. Seien e_1, e_2, e_3 die kanonischen Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^3$. Dann sind $U_1 = \mathcal{LH}(e_1, e_2)$ und $U_2 = \mathcal{LH}(e_2, e_3)$ zwei-dimensionale Untervektorrüme des $\mathbb{R}^3$. Jedoch ist $x := (1, 1, 0)^T \in U_1$, aber $x \notin U_2$. $\square$

(v) Sei $\dim V \geq 2$. Für jeden Vektor $u \in V$ gibt es einen Untervektorraum U von V, für den $u \in U$ und $U \neq V$ gilt.
Lösungsvorschlag: Die Aussage ist richtig. Sei $u \in V$ beliebig und setze $U = \mathcal{LH}(u)$. Dann gilt $\dim U = 1$, falls $u \neq 0$ und $\dim U = 0$, falls $u = 0$. Offenbar ist U ein Untervektorraum von V und es gilt $u \in U$. Jedoch ist $U \neq V$, da $\dim U < 2$ und $\dim V \geq 2$. $\square$

(vi) Ist $(G, \circ)$ eine Gruppe und sind U_1 und U_2 Untergruppen von $(G, \circ)$, so ist auch $U_1 \cap U_2$ eine Untergruppe von $(G, \circ)$.
Lösungsvorschlag: Die Aussage ist korrekt: We weil U_1, U_2 Untergruppen von G sind, enthalten sie beiden das neutrale Element e von G (das wurde in Aufgabe 12 bewiesen). Somit ist der Schnitt $U_1 \cap U_2$ nicht leer. Seien nun $a, b \in U_1 \cap U_2$ und somit auch $a, b \in U_1$ und $a, b \in U_2$. Da U_1 eine Untergruppe von G ist, folgt nach Aufgabe 12 (Untergruppenkriterium), dass $a^{-1} \circ b \in U_1$ und analog, dass $a^{-1} \circ b \in U_2$. Damit folgt aber auch, dass $a^{-1} \circ b \in U_1 \cap U_2$. Nach dem Untergruppenkriterium ist somit $U_1 \cap U_2$ eine Untergruppe von G. $\square$

2. Betrachten Sie die folgenden Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$: (10)

$$U = \mathcal{LH}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \qquad V = \mathcal{LH}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right).$$

Bestimmen Sie $\dim(U+V)$ und $\dim(U\cap V)$.
Lösungsvorschlag: Setze

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Beachte, dass $U+V$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist. Somit gilt $\dim\,(U+V) \leq 3$. Offenbar gilt $u_1, u_2, v_1 \in U+V$ und

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Somit sind die drei Vektoren u_1, u_2, v_1 linear unabhängig und bilden daher eine Basis von $U+V$, da drei linear unabhängige Vektoren eines höchstens drei-dimensionalen Vektorraumes stets eine Basis bilden. Somit gilt $\dim\,(U+V) = 3$.
Da die Vektoren u_1, u_2, v_1 linear unabhängig sind, ist auch jede Teilmenge dieser Vektoren linear unabhängig, insbesondere die beiden Vektoren u_1, u_2. Daher gilt $\dim U = 2$.
Außerdem gilt

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

d.h. die Vektoren v_1, v_2 sind ebenfalls linear unabhängig. Somit ist $\dim V = 2$. Aus der Dimensionsformel folgt

$$\dim\,(U\cap V) = \dim U + \dim V - \dim\,(U+V) = 2+2-3 = 1.$$

3. Seien im $\mathbb{R}^4$ die Vektoren (15)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

gegeben. Seien ferner $V = \mathcal{LH}(v_1, \dots, v_4)$ und $U = \mathcal{LH}(u_1, u_2)$.

(i) Wählen Sie aus den Vektoren $v_1, \dots, v_4$ eine Basis von V aus.
Lösungsvorschlag: Durch Vergleich der dritten und vierten Komponenten der Vektoren v_1, v_2 sieht man, dass diese Vektoren linear unabhängig sind. Außerdem gilt $v_3 = v_1 + v_2$ und $v_4 = -v_2$. Daher sind v_1, v_2 eine Basis von V.
Bemerkung: Selbstverständlich kann man auch die aus den Vektoren $v_1, \dots, v_4$ resultierende Matrix auf Zeilenstufenform bringen, und anhand dieser Zeilenstufenformen sehen, welche der Vektoren $v_1, ..., v_4$ man auswählen kann um eine Basis von V zu erhalten.
Anstelle des Paars (v_1, v_2) bilden übrigens auch (v_1, v_3), (v_1, v_4) und (v_2, v_3) eine Basis von V. In der folgenden Teilaufgabe benutzen wir exemplarisch $V = \mathcal{LH}(v_1, v_2)$.

(ii) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^4 = V \oplus U$ gilt.
Lösungsvorschlag: Es gilt $V = \mathcal{LH}(v_1, v_2)$ und $U = \mathcal{LH}(u_1, u_2)$. Wir zeigen zunächst, dass $\mathbb{R}^4 = V + U$ gilt. Hierbei gehen wir wie folgt vor: Der $\mathbb{R}^4$ ist ein vier-dimensionaler Vektorraum und wir haben die vier Vektoren $v_1, v_2, u_1, u_2 \in V + U \subset \mathbb{R}^4$ gegeben. Falls gezeigt wird, dass diese Vektoren linear unabhängig sind, bilden diese ein Ergeugendensystem des $\mathbb{R}^4$, woraus die Behauptung folgt. Wir berechnen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Also sind die Vektoren v_1, v_2, u_1, u_2 linear unabhängig und daher $V + U = \mathbb{R}^4$.
Um zu zeigen, dass $U \cap V = \{0\}$ gilt, benutzen wir die Dimensionsformel:

$$4 = \dim \mathbb{R}^4 = \dim\,(V+U) = \dim U + \dim V - \dim\,(U\cap V) = 4 - \dim\,(U\cap V).$$

Also ist $\dim\,(U\cap V) = 0$ und daher $U \cap V = \{0\}$.
Insgesamt folgt $\mathbb{R}^4 = V \oplus U$. $\square$

4. Sei K ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}$. Sei ferner $A \in K^{n,n}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen: (10)

(i) $\ker(A^m) \subset \ker\left(A^{m+1}\right)$.
Lösungsvorschlag: Sei $x \in \ker(A^m)$, d.h. $A^m x = 0$. Dann folgt $A^{m+1}x = AA^m x = A \cdot 0 = 0$. Also ist $x \in \ker A^{m+1}$. Es folgt die Behauptung. $\square$

(ii) $\operatorname{rg}(A^m) \geq \operatorname{rg}\left(A^{m+1}\right)$.
Lösungsvorschlag: Nach der Rangformel gilt:

$$\begin{aligned} n &= \dim \ker (A^{m+1}) + \operatorname{rg}(A^{m+1}), \\ n &= \dim \ker (A^m) + \operatorname{rg}(A^m). \end{aligned}$$

Hieraus folgt mit Teilaufgabe (i):

$$\operatorname{rg}(A^m) = n - \dim \ker (A^m) \geq n - \dim \ker (A^{m+1}) = \operatorname{rg}(A^{m+1}). \quad \square$$

5. Seien (10)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -9 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}, \qquad b = \begin{pmatrix} -16 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

gegeben. Finden Sie alle $x \in \mathbb{R}^4$ mit $Ax = b$.

Lösungsvorschlag: Wir verwenden den Gauß-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & -9 & -16 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 8 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 4 & 6 & 8 & 16 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & -9 & -16 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 4 & 6 & 8 & 16 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 16 \\ 0 & 7 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 19 & 62 & 112 \end{array}\right)$$

Die letzte Variable x_4 kann also als ein beliebiges $t \in \mathbb{R}$ gewählt werden. Dies setzen wir in die dritte Zeile ein und erhalten

$$x_3 = -\frac{62t}{19} + \frac{112}{19}.$$

Hieraus ergibt sich schließlich

$$x_2 = \frac{47}{19}t - \frac{80}{19}, \qquad x_1 = -\frac{16}{19}t + \frac{24}{19},$$

also

$$x = \left(-\frac{16}{19}t + \frac{24}{19}, \frac{47}{19}t - \frac{80}{19}, -\frac{62t}{19} + \frac{112}{19}, t\right)^T, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

6. Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade und sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ antisymmetrisch, d.h. es gelte $A^T = -A$. Zeigen Sie, dass $\det A = 0$ ist. (5)

Lösungsvorschlag: Es gilt:

$$\det A^T = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A.$$

Somit ist $2 \det A = 0$ und deshalb $\det A = 0$. $\square$

7. Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K und U ein Untervektorraum von V. Zeigen Sie, dass es einen Untervektorraum W von V gibt, für den $V = U \oplus W$ gilt. (10)

Lösungsvorschlag: Sei $\dim V = n \in \mathbb{N}$ und $\dim U = m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$. Sei $u_1, \ldots, u_m$ eine Basis von U. Nach dem Basisergänzungssatz lassen sich diese Vektoren zu einer Basis von V ergänzen, d.h. es gibt Vektoren $w_{m+1}, \ldots w_n$ so, dass $u_1, \ldots, u_m, w_{m+1}, \ldots, w_n$ eine Basis von V ist.
Wir setzen $W = \mathcal{LH}(w_{m+1}, \ldots, w_n)$ und zeigen, dass $V = U \oplus W$.
Da $u_1, \ldots, u_m, w_{m+1}, \ldots, w_n$ eine Basis von V ist, gilt $V = U + W$. Wir müssen nur noch zeigen, dass $U \cap W = \{0\}$ gilt. Sei hierzu $x \in U \cap W$. Dann gibt es Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n \in K$ derart, dass

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i = x = \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i w_i$$

gilt, und hieraus folgt

$$0 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i - \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i w_i.$$

Da die Vektoren $u_1, \ldots, u_m, w_{m+1}, \ldots, w_n$ eine Basis von V bilden, sind sie linear unabhängig. Somit folgt $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ und daher ist $x = 0$. □

8. Berechnen Sie für $t \in \mathbb{R}$ und (10)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & t \\ 1 & 4 & t^2 \end{pmatrix}$$

die Determinante $\det A$. Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem $Ax = b$ für alle $b \in \mathbb{R}^3$ eindeutig lösbar?

Lösungsvorschlag: Es gilt nach dem Laplace'schen Entwicklungssatz:

$$\det A = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & t \\ 4 & t^2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 2t^2 - 4t + 2 = 2(t^2 - 2t + 1) = 2(t-1)^2.$$

Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ ist für jedes $b \in \mathbb{R}^3$ genau dann eindeutig lösbar, wenn $\det A \neq 0$ ist, also wenn $t \neq 1$ gilt.