Universität Ulm

Abgabe:

Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Attila Klimmek
Wintersemester 2016/17
Punktzahl:

Lösungsvorschlag Lineare Algebra 1: Blatt 4

17. (i)

Lösungsvorschlag: "$\Leftarrow$" Seien $x_1, x_2 \in M$ derart, dass $\begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} g(x_1) \\ g(x_2) \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind. Wir zeigen, dass f und g linear unabhängig sind: Seien $\lambda, \mu \in K$ derart, dass $\lambda f + \mu g = 0$ gilt. Dann gilt insbesondere

$$\begin{aligned} &\lambda f(x_1) + \mu g(x_1) = 0 \\ \text{und} \qquad &\lambda f(x_2) + \mu g(x_2) = 0 \end{aligned}$$

und somit

$$\lambda \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} g(x_1) \\ g(x_2) \end{pmatrix} = 0$$

Weil $\begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} g(x_1) \\ g(x_2) \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind, folgt somit $\lambda = \mu = 0$.

"$\Rightarrow$" Seien f, g linear unabhängig. Dann ist f nicht die konstante Null-Funktion, also finden wir ein $x_1 \in M$ mit $f(x_1) \neq 0$. Sei nun angenommen, die Behauptung wäre falsch. Dann sind die beiden Vektoren $\begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} g(x_1) \\ g(x_2) \end{pmatrix}$ für alle $x_2 \in M$ linear abhängig. Weil der erste der beiden Vektoren nicht Null ist (wegen $f(x_1) \neq 0$), folgt daraus, dass es für jedes $x_2 \in K$ ein $\lambda_{x_2} \in K$ mit der Eigenschaft $\begin{pmatrix} g(x_1) \\ g(x_2) \end{pmatrix} = \lambda_{x_2} \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \end{pmatrix}$ gibt. Aus der ersten Zeile dieser Gleichung folgt wegen $f(x_1) \neq 0$, dass $\lambda_{x_2} = \frac{g(x_1)}{f(x_1)}$ gilt, d.h. λ_{x_2} hängt in Wirklichkeit gar nicht von x_2 ab. Aus der zweiten Zeile der obigen Gleichung folgt nun $g(x_2) = \lambda_{x_2} f(x_2) = \frac{g(x_1)}{f(x_1)} f(x_2)$ für alle $x_2 \in M$. Somit ist

$$g = \frac{g(x_1)}{f(x_1)} f,$$

d.h. f und g sind linear abhängig. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. $\square$