



## Versuchsanleitung

# Wirbelstrombremse

Nummer: 24  
Kompiliert am: 12. Januar 2024  
Letzte Änderung: 12.01.2024  
Beschreibung: In diesem Versuch wird die Wirkungsweise der Wirbelstrombremse untersucht und die Abhängigkeit von verschiedenen Parametern überprüft.  
Webseite: <https://www.uni-ulm.de/nawi/institut-fuer-quantenoptik/ag-prof-jelezko/lehre/grundpraktikum-physik-physwiphys-la-phys/>

---

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einführung</b>	<b>2</b>
<b>2 Stichpunkte zur Versuchsvorbereitung</b>	<b>2</b>
2.1 Theorie . . . . .	2
2.2 Beispiele aus Natur und Alltag . . . . .	2
<b>3 Versuchsdurchführung</b>	<b>2</b>
3.1 Vorbereitung . . . . .	3
3.2 Magnetische Flussdichte der Magnete in Abhängigkeit von Anzahl und Ort . . .	3
3.3 Überprüfung der Abhängigkeiten der Bremswirkung . . . . .	3
<b>4 Versuchszubehör</b>	<b>4</b>
<b>5 Hinweise zur Ausarbeitung</b>	<b>4</b>
<b>Literatur</b>	<b>5</b>
<b>6 Anhang: Zur Theorie der Wirbelstrombremse</b>	<b>5</b>

# 1 Einführung

Die Wirbelstrombremse ist ein technisch weit verbreitetes elektromagnetisches Prinzip, nach dem ein mechanisches System effektiv und vor allem verschleißfrei gedämpft werden kann. In der Fahrzeugtechnik wird die Wirbelstrombremse als *Retarder* eingesetzt, der das auf Gleitreibung basierende Hauptbremsystem unterstützt. Physikalisch interessant ist, deswegen wird die Wirbelstrombremse auch im physikalischen Grundpraktikum beim Drehpendelversuch eingesetzt, dass die Bremswirkung proportional zur Geschwindigkeit ist, wie wir es in der Differentialgleichung für den gedämpften harmonischen Oszillator fordern. Dementsprechend ist dieses Prinzip allerdings nicht dazu geeignet, ein mechanisches System schnell zum Stillstand zu bringen.

In diesem Versuch wollen wir uns mit dem Prinzip der Wirbelstrombremse vertraut machen und vor allem die Abhängigkeit der Bremswirkung von den Parametern Geschwindigkeit  $v$ , magnetische Flussdichte  $B_0$  und Leitfähigkeit  $\sigma$  des Scheibenmaterials untersuchen.

## 2 Stichpunkte zur Versuchsvorbereitung

### 2.1 Theorie

- Grundlagen zum gedämpften harmonischen Oszillator, Bewegungsgleichung eines Körpers auf der schiefen Ebene mit Roll- (konstante Kraft) und viskoser Reibung (Kraft  $\propto v$ ) [Mes10] (siehe auch theoretische Ergänzung zum Versuch).
- Grundlagen elektrisches Feld, Leitfähigkeit und Ohm'sche Verluste [Dem13].
- Grundlagen zu Magnetfelder und Lorentz-Kraft [Dem13].
- Grundlagen zur Laplace- und Poisson-Gleichung und deren Lösung (jedes Skript zu 'Lineare partielle Differentialgleichungen' leitet die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung her; siehe auch theoretische Ergänzung zum Versuch im Anhang).

### 2.2 Beispiele aus Natur und Alltag

- Versuche mit Dämpfungstherm  $\sim v$  wie beim gedämpften harmonischen Oszillator.
- Dauerbremsen bzw. Retarder in LKW's und Zügen.

## 3 Versuchsdurchführung

Dem Versuch ist ein Kolloquium vorangestellt. Hiermit soll sichergestellt werden, dass jeder Teilnehmer ausreichende Kenntnis über die Grundlagen der Mechanik und der Elektrizität und Magnetismus hat. Experimentell ist dieser Versuch keine große Herausforderung. Das Besondere an ihm ist die raffinierte Auswertemethode und die richtige Lösung des Wirbelstrombremsen-Problems und dessen Poisson-Gleichung.

### 3.1 Vorbereitung

Messen Sie den Durchmesser der Magnete, die Länge der schiefen Ebene, Dicke der einzelnen Metall-Bleche. Bestimmen Sie außerdem die Massen der Magnete, der Ausgleichkörper und des Modellautos.

### 3.2 Magnetische Flussdichte der Magnete in Abhängigkeit von Anzahl und Ort

Bestimmen Sie die Abhängigkeit der magnetischen Flussdichte  $B(r, h)$  vom Abstand  $(r, h)$  vom Zentrum des Magneten. Dies ist wegen der Ausdehnung und mäßiger Positionierbarkeit der Sonde nur grob möglich und soll später einen qualitativen Vergleich mit einem der Modelle ermöglichen. Wiederholen sie die Messung für Stapel mit 2 und 3 Magneten (ergibt verschiedene  $B$ 's im Zentrum).

### 3.3 Überprüfung der Abhängigkeiten der Bremswirkung

#### 3.3.1 Unabhängigkeit der Auswertung von der Neigung

Bauen Sie die vollständige Versuchsanordnung mit dem Kupferblech der Dicke  $d = 1$  mm auf und verwenden Sie eine Konfiguration von Bremsmagneten (z.B. (5-5-4+2) mm Dicke). Bestimmen Sie zuerst den minimalen Neigungswinkel  $\alpha_{\min}$ , bei dem das Modellauto gerade noch mit konstanter Geschwindigkeit abläuft. Hieraus ergibt sich der Reibungskoeffizient. Bestimmen Sie dann für 5 größere Neigungswinkel  $\alpha_i$  jeweils 6 Messungen der ungebremsten und gebremsten Ablaufzeiten. Daraus ergeben sich die Zeitkonstanten  $\tau_i$ .

#### 3.3.2 Bremswirkung in Abhängigkeit vom Volumen

Das aktive Volumen  $V$  wird variiert durch Änderung der Dicke des leitfähigen Blechs. Bestimmen Sie mit dem Aufbau aus Versuchsteil 3.3.1 für einen mittleren Neigungswinkel die Abhängigkeit der Bremswirkung für 3 verschiedene Dicken des Kupferblechs (1.0 mm, 2.0 mm und 3.0 mm) mit jeweils 6 Zeitmessungen.

#### 3.3.3 Bremswirkung in Abhängigkeit von der Feldstärke

Die vor dem Magneten gemessene Feldstärke hängt von der Anzahl der Magnete im Stapel ab (Genauerer in der Vorlesung 'Magnetismus'). Bestimmen Sie für verschiedene Konfigurationen des Magnetstapels die magnetische Flussdichte und die ge- und ungebremsten Ablaufzeiten mit dem Aufbau aus Versuchsteil 3.3.1 bei einem mittleren Neigungswinkel mit jeweils 6 Zeitmessungen je Magnetkonfiguration.

#### 3.3.4 Bremswirkung in Abhängigkeit von der Leitfähigkeit

Tauschen Sie das Kupferblech gegen die anderen Bleche (Al, Messing, Stahl) aus (Stärke jeweils 1.0 mm) und wiederholen Sie jeweils Versuchsteil 3.3.1 für den mittleren Neigungswinkel (6

Messungen pro Material). Messen sie außerdem die notwendigen anderen Größen.

### 3.3.5 Bremswirkung in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit

Stellen Sie den Zustand hoher Bremswirkung her und verschieben Sie die obere Lichtschranke so, dass Sie später  $v_\infty$  berechnen können. Bestimmen Sie für sieben verschiedene Neigungswinkel die Ablaufzeiten jeweils 6 Mal.

## 3.4 Häufige Fehler

- Mangelnde Vorbereitung!

## 4 Versuchszubehör

- Schiefe Ebene mit einstellbarer Steigung.
- 2 Lichtschranken mit Start-Stopp-Uhr mit ms-Auflösung.
- Cu-, Al-, Stahl- und Messing-Bleche verschiedener Stärke.
- Modellauto als Ablaufkörper.
- Hochleistungsmagnete aus NdFeB
- Ausgleichskörper aus Messing; Distanzstücke aus Kupfer.
- Tesla-Meter (Hall-Sonde) zur Messung der magnetischen Flussdichte.
- Elektronische Waage bis 500 g.
- Schieblehre, Bügelmessschraube, Lineal.
- Setze  $g = 9.8082 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  (vgl. 43. Physikertagung 1979 in Ulm).

## 5 Hinweise zur Ausarbeitung

### 5.1 Versuchsspezifisch

- Listen Sie die Ergebnisse aus 3.1 in einer Tabelle.
- Stellen Sie das Ergebnis (die  $\tau_i$ 's) von 3.3.1 tabellarisch dar und bewerten Sie die erwartete Unabhängigkeit von der Neigung.
- Stellen Sie das Ergebnis von 3.3.2 tabellarisch dar und bewerten Sie die erwartete lineare Abhängigkeit.
- Stellen Sie das Ergebnis von 3.3.3 graphisch dar und bewerten Sie die erwartete quadratische Abhängigkeit.
- Stellen Sie das Ergebnis von 3.3.4 unter Zuhilfenahme von Literaturwerten tabellarisch dar und bewerten Sie die erwartete lineare Abhängigkeit.

- Stellen Sie das Ergebnis von 3.3.5 ( $\frac{s}{t_2} \propto \sin(\alpha)$ ) graphisch dar und bestimmen Sie die Steigung. Bewerten Sie die erwartete lineare Abhängigkeit.
- Versuchen Sie abschließend anhand der vorangegangenen Experimenten (am besten eignet sich das Ergebnis von 3.3.5) den Koeffizienten  $\beta$  abzuschätzen. Sind die Ergebnisse genau genug um ein Modell für das Profil der Flussdichte zu bevorzugen?

## 5.2 Allgemein

- Ergebnisse richtig runden (siehe Anleitung Limmer und/oder Folien zu unserem Statistik-Workshop)
- Gute Abbildungen verwendet (z.B. deutsche Beschriftung, Skizzen entsprechen den Erläuterungen, ...); Skizzen dürfen gerne selbst angefertigt werden
- Diskussion und/oder Wertung der Ergebnisse

## Literatur

- [Dem13] DEMTRÖDER, Wolfgang: *Experimentalphysik 2: Elektrizität und Optik*. 5. Auflage. Berlin, Heidelberg : Springer Verlag, 2013
- [Mes10] MESCHÉDE, Dieter: *Gerthsen Physik*. 24. Auflage. Berlin, Heidelberg : Springer Verlag, 2010

## 6 Anhang: Zur Theorie der Wirbelstrombremse

(siehe nächste Seite)

# Neuer Versuch für GP Physik Ic: Wirbelstrombremse

---

## Inhalt

Theorie zur Wirbelstrombremse .....	1
Vorbetrachtung: .....	1
Formulierung des Problems: .....	2
Modell 1: .....	3
Modell 2: .....	6
Modell 3: .....	8
Experiment 1 .....	10
Experimenteller Aufbau: .....	13
Abschätzung der Parameter:.....	14
Experiment 2 .....	10

## Theorie zur Wirbelstrombremse

### Vorbetrachtung:

Eine vereinfachte Abschätzung, die sehr oft zu sehen ist, geht von einem homogenen Magnetfeld  $\mathbf{B}$  senkrecht zu einer mit konstanter Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  senkrecht zum Magnetfeld bewegten Metallplatte der Dicke  $d$  aus. Das Magnetfeld sei auf einen Zylinder senkrecht zur Metallplatte, also auf ein Volumen  $V = \pi r^2 d$  im Metall, beschränkt. Das Metall besteht aus Ionen und Elektronen, von denen letztere frei beweglich sind (Jellium-Modell). Auf diese wirkt die Lorentz-Kraft (wir vernachlässigen also die Ionen, was erst einmal fast willkürlich erscheint). Durch die Lorentz-Kraft entsteht aufgrund der einfachen Geometrie ein homogenes elektrisches Feld  $E_L = v \cdot B$  im Metall, was nach dem Ohm'schen Gesetz einer Stromdichte  $j = \sigma v \cdot B$  mit der spezifischen Leitfähigkeit  $\sigma$  entspricht. Die damit verknüpfte Dissipationsdichte ist  $\frac{P}{V} = \frac{j^2}{\sigma} = \sigma (vB)^2$ . Gehen wir von der Energieerhaltung aus, entspricht die elektrisch dissipierte Leistung der mechanisch dissipierten Leistung und damit einer bremsenden Kraft

$$F_{\text{brems},0} = \frac{P}{v} = \frac{j^2}{\sigma} \cdot \frac{V}{v} = \sigma \cdot v \cdot B^2 \cdot \pi r^2 \cdot d. \quad (0)$$

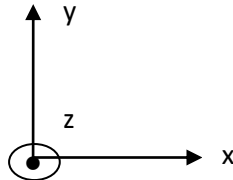
Diese einfache Abschätzung zeigt zumindest prinzipielle Erwartungen, das heißt Proportionalitäten wie  $F_{\text{brems},0} \sim \sigma$ ,  $F_{\text{brems},0} \sim v$ ,  $F_{\text{brems},0} \sim B^2$  und  $F_{\text{brems},0} \sim V$ . Die Relation  $F_{\text{brems},0} \sim v$  ist für uns interessant, weil sie zeigt, dass die Wirbelstrombremse die Voraussetzung als dämpfendes Element in einem gedämpften harmonischen Oszillator erfüllt. Ansonsten darf (0) bestenfalls als grobe Abschätzung der Kraftwirkung verstanden werden, da ja der Stromfluss im Außenbereich des Zylinders vernachlässigt wurde. Nimmt man zum Beispiel an, dass sich effektiv der

Gesamtwiderstand durch den Außenbereich verdoppelt, führt dies nach  $P = I^2 R = \frac{U^2}{R}$  mit der ‚induzierten‘ Spannung  $U$  sofort zu einer Halbierung der Bremswirkung.

Im Folgenden wird die Theorie zur Wirbelstrombremse formuliert. Anschließend werden 3 Modelle für das Magnetfeld, d.h. dessen radiale Abhängigkeit, analytisch behandelt. Abschließend werden 2 mögliche Experimente analysiert.

## Formulierung des Problems:

Koordinatensystem:



Eine metallische Platte der Leitfähigkeit  $\sigma$  und Dicke  $d$  wird in einer Scheibe durch ein senkrechtes Magnetfeld  $\vec{B}_z$  durchsetzt. Die Platte bewege sich mit Geschwindigkeit  $\vec{v}_x$ . Durch die Lorentz-Kraft auf die Elektronen

$$\vec{F}_{L,y} = -e\vec{v}_x \times \vec{B}_z \quad (1)$$

entsteht dann im Metall ein konstantes, auf die Scheibe beschränktes elektrisches Feld

$$\vec{E}_{L,y} = \vec{v}_x \times \vec{B}_z. \quad (2)$$

Der durch dieses elektrische Feld generierte Strom produziert eine stationäre Verschiebung der Ladungsträgerdichte  $\rho_{\text{infl}}$ , die die Divergenzfreiheit der Stromdichte  $\vec{j}$  und die Gültigkeit der Maxwell-Gleichung an jedem Ort der Platte garantiert:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (3)$$

und 
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{\text{infl}} = \frac{\rho_{\text{infl}}}{\epsilon_0}. \quad (4)$$

Es handelt sich bei  $\rho_{\text{infl}}$  um eine Art ‚magnetische Influenzladung‘, die das Influenzfeld  $\vec{E}_{\text{infl}}$  so erzeugt, dass die Ladungen regulär fließen können. Das Ohm'sche Gesetz hat Gültigkeit in der Form

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}_{\text{total}} \quad (5)$$

mit dem gesamten Feld  $\vec{E}_{\text{total}} = \vec{E}_L + \vec{E}_{\text{infl}}$ . Die Ladungserhaltung  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$  wird also zu

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \sigma \vec{\nabla} \cdot (\vec{E}_L + \vec{E}_{\text{infl}}) = \sigma \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_L + \frac{\rho_{\text{infl}}}{\epsilon_0} \right) = 0. \quad (6)$$

Zu beachten ist also, dass die Influenzladungen der *negativen* Divergenz des Lorentz-Feldes entsprechen, und damit einen Teil des Lorentz-Feldes kompensieren bzw. die Effektivität der Wirbelstrombremse einschränken. Nach den Maxwell-Gleichungen muss die Poisson-Gleichung für das influenzierte elektrostatische Potential  $\Phi_{\text{infl}}$  und die Influenzladung  $\rho_{\text{infl}}$  gelten:

$$\Delta \Phi_{\text{infl}} = -\frac{\rho_{\text{infl}}}{\epsilon_0}. \quad (7)$$

Mithilfe des Potentials erhält man wiederum das elektrische Feld  $\vec{E}_{\text{infl}} = -\vec{\nabla} \Phi_{\text{infl}}$ , daraus nach (5) die Stromdichte  $\vec{j} = \sigma \vec{E}_{\text{total}}$ , die gesamte dissipierte Leistung  $P_{\text{total}} = \int_V \frac{j^2}{\sigma} dV$  und schließlich die Bremskraft aus  $F_{\text{Brems}} = \frac{P_{\text{total}}}{v}$ .

## Modell 1:

Die Aufgabe besteht also zuerst einmal darin, aus dem Magnetfeld  $\mathbf{B}_z(x,y)$  nach (2) das Lorentz-Feld  $\mathbf{E}_{L,y}$  und die Influenzladung  $\rho_{\text{infl}}$  nach (6) zu berechnen:

$$E_{L,y} = v_x B_z \quad (8)$$

$$\rho_{\text{infl}} = -\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_L = -\epsilon_0 v_x \cdot \partial_y B_z. \quad (9)$$

Setzt man  $\mathbf{B}$  rotationssymmetrisch nach  $B_z(r = \sqrt{x^2 + y^2}) = B_0 \cdot \left(1 + \frac{r^2}{r_0^2}\right)^{-n}$  an, wird (9) zu

$$\rho_{\text{infl}} = 2ny \frac{\epsilon_0 v_x B_0}{r_0^2} \left(1 + \frac{r^2}{r_0^2}\right)^{-n-1}. \quad (10)$$

Die allgemeine Lösung gestaltet sich auch mit diesem Ansatz schwierig. Sie gelingt mit ausreichend großem  $n \geq 2$  in Polarkoordinaten und mit einem Produktansatz. Für  $n=2$  erhält man die Ladungsträgerdichte

$$\rho_{\text{infl},2} = 4y \frac{\epsilon_0 v_x B_0}{r_0^2} \left(1 + \frac{r^2}{r_0^2}\right)^{-3} = \epsilon_0 v_x B_0 \frac{4r \cdot \sin(\varphi)}{r_0^2} \left(1 + \frac{r^2}{r_0^2}\right)^{-3}$$

und damit aus (7) die allgemeine Lösung (vgl. Maple-worksheet ‚Lösungsversuche‘)

$$\Phi_{\text{infl}}(r, \varphi) = v_x B_0 \left\{ \left( a \cdot r + \frac{b}{r} \right) - \frac{\frac{1}{2}(c r^3 + \frac{d}{r} + e \cdot r)}{(r^2 + r_0^2) \cdot (c \cdot r_0^4 + d - e \cdot r_0^2)} \cdot r_0^5 \right\} \cdot \sin(\varphi). \quad (11)$$

Die Konstanten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  müssen aus physikalischen Gründen Null sein ( $a$  und  $c$ , damit  $\Phi \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$ ,  $b$  und  $d$ , damit  $\Phi$  endlich für  $r = 0$ ). Daher vereinfacht sich das Potential sehr zu

$$\Phi_{\text{infl}}(r, \varphi) = v_x B_0 \cdot \frac{r}{2(1 + \frac{r^2}{r_0^2})} \cdot \sin(\varphi). \quad (12)$$

Nachfolgende Abbildung 1 zeigt das Potential mit Blick in z-Richtung (hier als y angegeben):

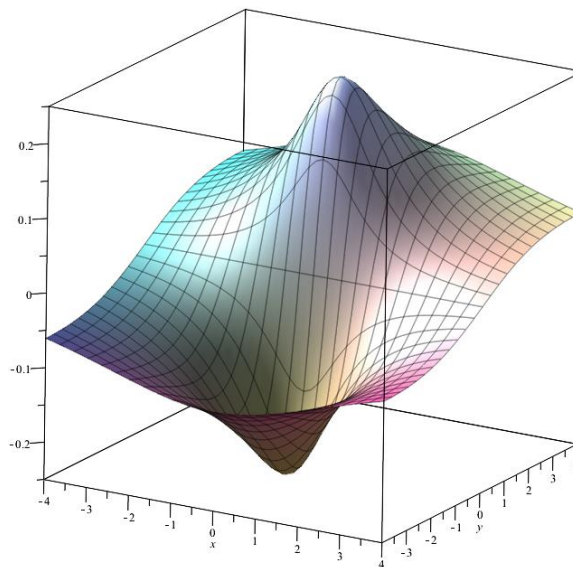


Abb. 1: 3D-Graph des Fluenzpotentials in Einheiten  $r_0$  und  $v_x B_0 r_0$ .

Die Extrema liegen wie zu erwarten an den Polkappen bei  $(0, \pm r_0, \pm \frac{\pi}{4})$ . Das elektrische Influenz-Feld errechnen wir zu

$$\vec{E}_{\text{infl}}(r, \varphi) = -v_x B_0 \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{r^2}{r_0^2}} \left\{ \left( 1 - \frac{2r^2}{r_0^2 \cdot \left(1 + \frac{r^2}{r_0^2}\right)} \right) \cdot \sin(\varphi) \cdot \vec{e}_r + \cos(\varphi) \cdot \vec{e}_\varphi \right\}, \quad (13a)$$



$$\vec{E}_{\text{infl}}(x, y) = -v_x B_0 \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{x^2 + y^2}{r_0^2}} \left( \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \left( 1 - \frac{2xy}{x^2 + y^2 + r_0^2} \right) \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right). \quad (13b)$$

Dies bedeutet, dass die Influenzladungen 50% des Lorentz-Feldes bzw. der möglichen Stromdichte im Zentrum kompensieren. Nachfolgende Abbildung zeigt den normalisierten Maple-Plot (*fieldplot*, Abb. 2) von  $\vec{E}_{\text{infl}}$ .

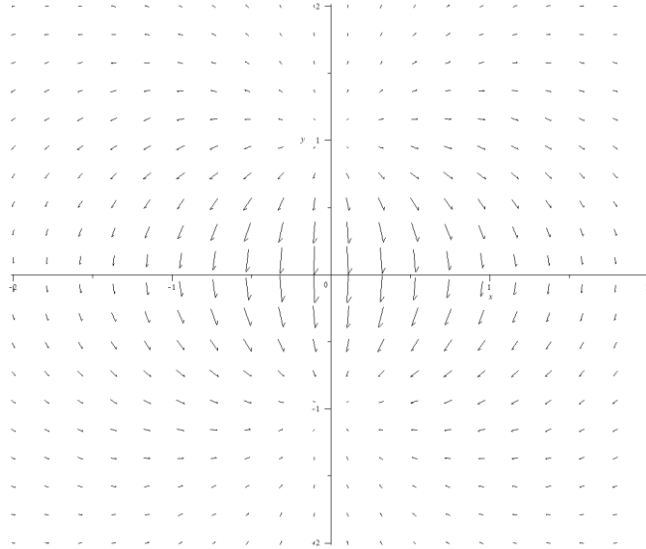


Abb. 2: Field-plot des Influenzfeldes im Bereich  $\pm 2r_0$ .

Entgegen der Erwartung wird das  $E_{\text{infl}}$ -Feld an den Polkappen Null und damit also auch die Influenz-Stromdichte. Entlang der x-Achse herrscht überall eine negative Stromdichte in y-Richtung. Diese ist

$$\vec{j}_{\text{infl}}(x, y = 0) = -\sigma \cdot v_x B_0 \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{r_0^2}} \cdot \vec{e}_y \quad (14)$$

und hat ein Maximum im Zentrum mit  $j_{\text{infl}}(x = y = 0) = \sigma \cdot v_x B_0 \cdot \frac{1}{2}$  bzw. integriert sich auf zu  $I_{\text{infl}}(y = 0) = -\sigma \cdot v_x B_0 \cdot \frac{\pi \cdot r_0}{4} \cdot d$  (Dicke  $d$  der Platte), ein besonders einfaches Ergebnis. Die gesamte Leistungsdichte  $\sigma \cdot j^2$  ist in unterem 3D-Graphen (Abb. 3) gezeigt. Die beiden Maxima liegen an den Polkappen und sind dort doppelt so hoch wie im Zentrum. Links und rechts des Zentrums bei ca.  $\pm 0.5$  befinden sich zwei Sattelpunkte mit einer Höhe von ca. 0.3.

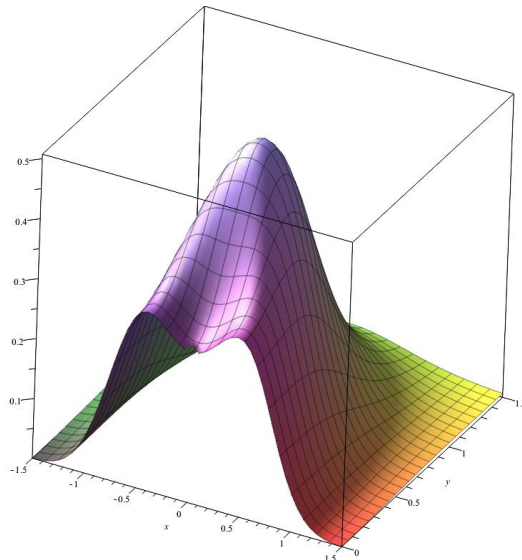


Abb. 3: 3D-Graph der Leistungsdichte im Bereich  $\pm 1.5r_0$  in Einheiten  $\sigma(\mathbf{v}_x\mathbf{B}_0)^2$ .

Die gesamte Ohm'sche Verlustleistung in der Platte ist

$$P_{\text{total}} = \int_V \frac{j^2}{\sigma} dV = d \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{j^2}{\sigma} r dr d\varphi = \sigma (v_x B_0)^2 \cdot r_0^2 d \cdot \frac{\pi}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) \quad (15)$$

mit  $\frac{\pi}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) \approx 1.420204$ . Die Bremskraft der Wirbelstrombremse ist also für den von uns gewählten Verlauf des magnetischen Feldes

$$F_{\text{Brems}} = \frac{P}{v_x} = \sigma v_x B_0^2 \cdot r_0^2 d \cdot \frac{\pi}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right). \quad (16)$$

Der Vollständigkeit halber sei unten (Abb. 4) noch der radiale Feldverlauf in normierten Einheiten geplottet. Er ist also nicht allzu sehr scharf und beträgt bei  $r_0$  nur noch 25% und bei  $r_0/2$  noch 64% des Maximalwertes. Der gesamte magnetische Fluss durch die Metallplatte ist halb so groß wie bei der Scheibe mit konstantem Feld  $\mathbf{B}_0$  (siehe Modell 3).

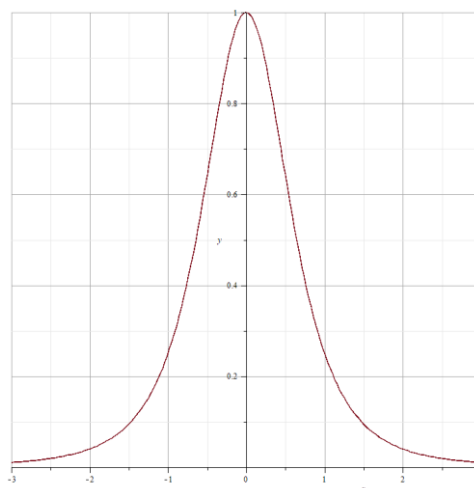


Abb. 4: Profil des Magnetfeldes in Modell 1 in Einheiten  $r_0$  und  $\mathbf{B}_0$ .

## Modell 2:

Der Feldverlauf in Modell 1 ist evtl. unbefriedigend, da er keinen sehr scharfen Rand hat. Besser geeignet ist vielleicht  $B_{z,2}(r) = B_0 \cdot \left(1 + \left(\frac{r^2}{r_0^2}\right)^n\right)^{-1}$  (vgl. Maple-worksheet ‚Lösungsversuche-2.mw‘).

Der radiale, normierte Feldverlauf ist in untenstehender Abbildung gezeigt (Abb. 5 links). Er weist bei  $n = 2$  schon einen schönen flachen Verlauf im Zentrum auf und fällt schnell nach außen hin ab, am Rand auf ein Halb.

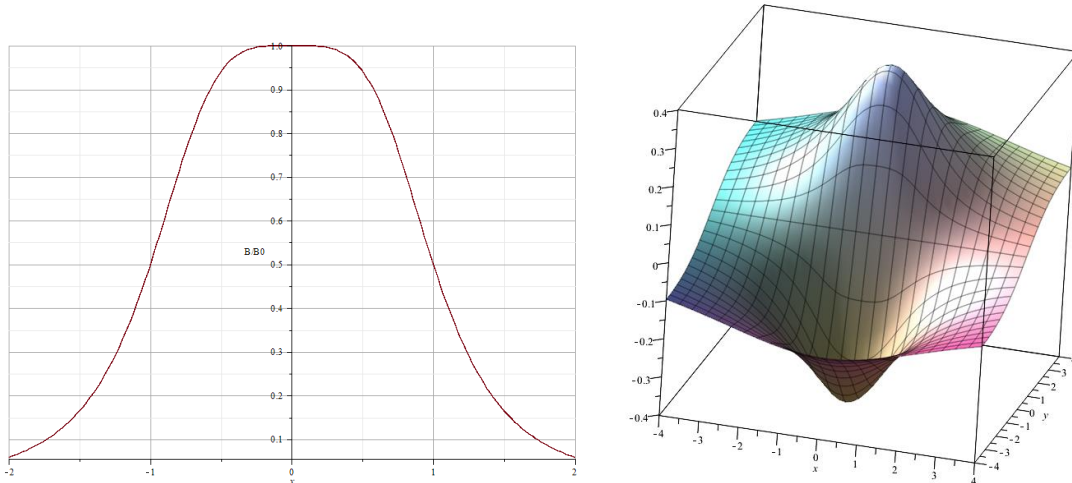


Abb. 5: Links das Profil des Feldverlaufes in Modell 2 in Einheiten  $r_0$  und  $B_0$ ; rechts der 3D-Graph des Influenzpotentials in Einheiten  $r_0$  und  $v_x B_0 r_0$ .

Die Influenzladung ist dann

$$\rho_{\text{infl}} = 2n\epsilon_0 v_x B_0 \frac{\left(\frac{r^2}{r_0^2}\right)^n}{\left(1 + \left(\frac{r^2}{r_0^2}\right)^n\right)^2} \frac{y}{r^2} \xrightarrow{n=2} \epsilon_0 v_x B_0 \frac{4 \cdot \left(\frac{r^2}{r_0^2}\right)^2}{\left(1 + \left(\frac{r^2}{r_0^2}\right)^2\right)^2} \frac{y}{r^2}, \quad (10-2)$$

wobei wir später  $y$  wieder durch  $y = r \cdot \sin(\varphi)$  ersetzen werden. Die allgemeine Lösung ist auch hier für festes  $n > 1$  mit einem Produktansatz auffindbar; wir rechnen das Beispiel mit  $n = 2$ , deren Verlauf in obiger Abbildung gezeigt ist. Die physikalisch relevante Lösung der Poisson-Gleichung lautet ganz einfach

$$\Phi_{\text{infl},2}(r, \varphi) = v_x B_0 \cdot \frac{\arctan\left(\frac{r^2}{r_0^2}\right)}{\frac{r}{r_0}} \cdot \sin(\varphi) \cdot \frac{r_0}{2} \quad (11-2)$$

mit in dem in obenstehender Abbildung gezeigten Verlauf (Abb. 5 rechts). Vergleicht man beide Potentialbilder, dann wurden trotz des schärfer definierten Randes des Magnetfeldes die Extrema des elektrostatischen Potentials nicht sichtlich schärfer oder höher. Die Extrema können nicht analytisch gefunden werden. Sie liegen bei ca.  $(0, -, \pm 1.179722510) r_0$  mit einer Höhe von ca.  $\pm 0.401682285 v_x B_0 \cdot r_0$ . Das elektrische Influenzfeld ist gegeben durch

$$\vec{E}_{\text{infl},2}(r, \varphi) = v_x B_0 \cdot \left\{ \left( \frac{1}{\left(1 + \frac{r^4}{r_0^4}\right)} - \frac{1}{2} \frac{\arctan\frac{r^2}{r_0^2}}{\frac{r^2}{r_0^2}} \right) \cdot \sin(\varphi) \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{2} \frac{\arctan\frac{r^2}{r_0^2}}{\frac{r^2}{r_0^2}} \cdot \cos(\varphi) \cdot \vec{e}_\varphi \right\} \quad (13-2)$$

und ist unten als polarer Field-Plot gezeigt (Abb. 6). Prinzipiell ist das sehr ähnlich zum vorangegangenen Modell 1.

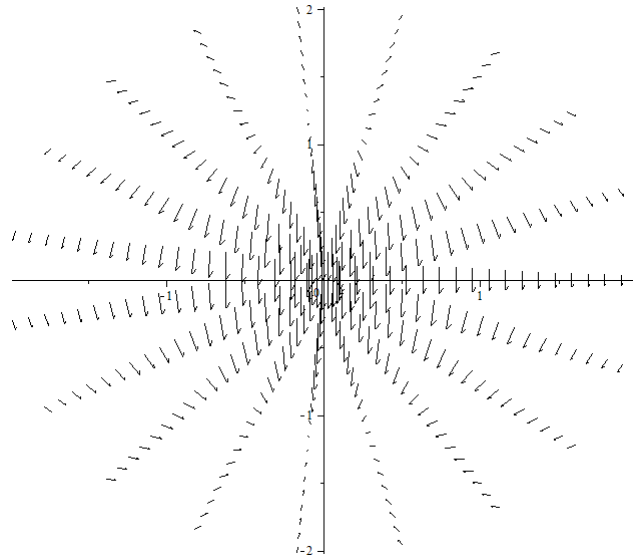


Abb. 6: Field-plot des Influenzfeldes im Bereich  $\pm 2r_0$ .

Das Influenzfeld kompensiert im Zentrum also wieder 50% des Lorentz-Feldes. Der gesamte Kompensationsstrom, der die  $x$ - $y$ -Ebene durchströmt, ist  $I_{\text{infl},2}(y=0) = -\sigma \cdot v_x B_0 \cdot \frac{\pi \cdot r_0}{\sqrt{2}} \cdot d$ . Somit wäre der gesamte induzierte Strom in Modell 2 um den Faktor  $\sqrt{2}$  größer als in Modell 1, so wie der gesamte magnetische Fluss durch die Platte um den Faktor  $\sqrt{2}$  größer ist. Die gesamte Ohm'sche Verlustleistung beträgt

$$P_{\text{total},2} = \sigma (v_x B_0)^2 \cdot r_0^2 d \cdot \frac{\pi^2}{8} \quad (15-2)$$

und ist damit (i) nur ca. ein Drittel der Verlustleistung, die die üblichen Angaben auf Basis des reinen Lorentz-Feld (verbotenerweise) vermuten ließe und (ii) um den Faktor  $\frac{\frac{\pi^2}{8}}{\frac{\pi(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3})}{2}} \approx 0.8687$  kleiner als in Modell 1, trotz des größeren magnetischen Flusses durch die Platte.

Untenstehende Abbildung 7 zeigt noch die Verteilung der Leistungsdichte nach Modell 2. Hier fehlen im Vergleich zu Modell 1 die Extrema an den Polkappen und die Sattelpunkte am Äquator. Vergleicht man diese Leistungsdichten, ist es fast schon erstaunlich, dass Modell 1 nur um ca. 15% effizienter ist. Dies kommt jedoch dadurch zustande, dass in Model 2 die Leistungsdichte viel weiter ausläd als in Modell 1. Man kann das in unterer Abbildung an den Nullstellen bei ca.  $(x = \pm 1.2, y = 0)$  und den signifikant ansteigenden Amplituden außerhalb erkennen. Die Leistungsverteilung ist also in Modell 1 räumlich deutlich begrenzter.

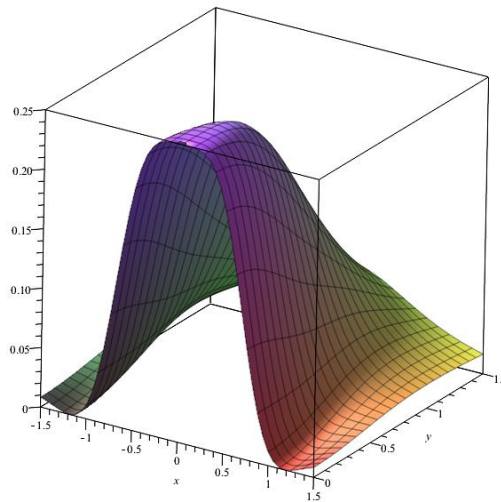


Abb. 7: 3D-Graph der Leistungsdichte im Bereich  $\pm 1.5r_0$  in Einheiten  $\sigma(\mathbf{v}_x \mathbf{B}_0)^2$ .

### Modell 3:

Was wäre nun, wenn wir wirklich einen Feldverlauf hätten wie ursprünglich angenommen (d.h. innerhalb einer Scheibe konstant und außerhalb Null – mit scharfem Rand)? Das Lorentz-Feld und die Influenzladungsdichte sind dann

$$E_{L,y} = v_x B_0 \cdot \Theta(r_0 - r) \quad (8-3)$$

und

$$\rho_{\text{infl}} = -\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}_L = \epsilon_0 v_x \cdot \delta(r_0 - r) \cdot \sin(\varphi). \quad (9-3)$$

$\Theta$  ist hier die Heaviside'sche Stufenfunktion,  $\delta$  die Dirac-Distribution. Mit der Poisson-Gleichung gehen wir hier aus technischen Gründen etwas physikalischer vor, als mit den vorangegangenen Modellen, denn Modell 3 ist sehr eng verwandt mit dem Endmagnetisierungs- bzw. Entpolarisierungsfeld in radialer Richtung eines Zylinders im äußeren Feld (siehe Festkörperphysik: Entmagnetisierungsfaktor, Lorentz-Feld, Formanisotropie). Wir machen sofort einen Produktansatz  $\Phi(r, \varphi) = \Phi_r(r) \cdot \Phi_\varphi(\varphi)$  und setzen die Winkelabhängigkeit  $\Phi_\varphi(\varphi) = \sin(\varphi)$ . Die zu lösende gewöhnliche Differentialgleichung ist dann  $\frac{d^2 \Phi_r(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi_r(r)}{dr} - \frac{\Phi_r(r)}{r^2} = \delta(r - 1)$  (wir rechnen hier leichter mit dem normalisierten Radius  $r := \frac{r}{r_0}$ ). Die physikalisch relevante Lösung (gefordert  $\Phi_r$  endlich bei  $r = 0 \rightarrow 1/r$ -Komponente Null gesetzt; allerdings wird die Proportional- $r$ -Komponente mitgenommen, damit  $\Phi_r$  endlich bei  $r \rightarrow \infty$ ) ist

$$\Phi(r, \varphi) = -v_x B_0 \cdot \frac{r_0}{2} \left( \frac{\theta(r-1)(r-1)(r+1)}{r} - r \right) \cdot \sin(\varphi). \quad (12-3)$$

Der resultierende Potentialverlauf ist in untenstehender Abbildung 8 gezeigt. Innerhalb der Scheibe ist er linear in  $y$ -Richtung entsprechend eines konstanten Feldes und kompensiert exakt die Hälfte des Lorentz-Feldes. Dies ist bekanntlich der Entpolari-/magnetisierungsfaktor des Zylinders in radialer Richtung. Außerhalb der Scheibe verhält es sich wie das Potential eines radial polarisierten Drahtes (die Potenz im Fernfeld ist um Eins höher als beim Punktdipol, da der Punktdipol ein 3-dimensionales Problem ist).

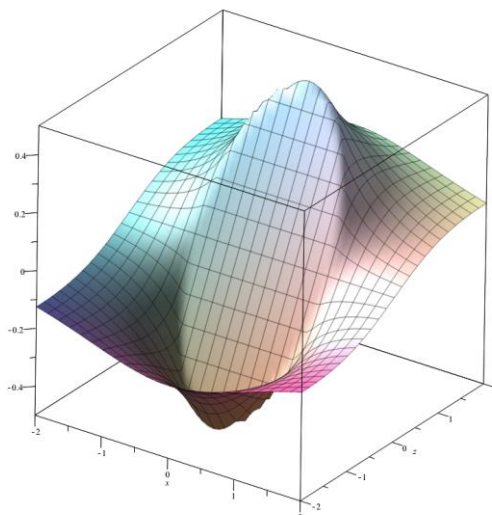


Abb. 8: 3D-Graph des Influenzpotentials in Einheiten  $r_0$  und  $v_x B_0 r_0$ .

Das elektrische Influenzfeld errechnet sich zu (Polar- und kartesische Koordinaten mit  $r := \frac{r}{r_0}$ )

$$\vec{E}_{\text{infl}}(r, \varphi) = v_x B_0 \cdot \frac{1}{2r^2} \left( (\theta(r-1)(r^2+1) - r^2) \cdot \sin(\varphi) \cdot \vec{e}_r + (\theta(r-1)(r^2-1) - r^2) \cdot \cos(\varphi) \cdot \vec{e}_\varphi \right) \quad (13a-3)$$

$$\vec{E}_{\text{infl}}(x, y) = v_x B_0 \cdot \left( \frac{\frac{\theta(r-1)}{r^4} \cdot x \cdot y}{\frac{1}{2} \left( \frac{\theta(r-1)((r-1)(x^2-y^2)+2r^2y^2)}{r^4} - \theta(1-r) \right)} \right). \quad (13b-3)$$

Zudem ist unten ein Field-plot mithilfe (13b-3) im Bereich  $x, y = [-2, 2]$  gezeigt. An den Polkappen springt das Influenz-Feld auf das umgekehrte Vorzeichen entsprechend der Flächenladungsdichte an der Oberfläche<sup>i</sup>. Am Äquator findet ein stetiger aber nicht stetig differenzierbarer Übergang von  $\vec{E}_{\text{infl}}(r \leq r_0, \varphi = 0) = \frac{1}{2} v_x B_0 \vec{e}_\varphi$  auf  $\vec{E}_{\text{infl}}(r > r_0, \varphi = 0) = \frac{1}{2r^2} v_x B_0 \vec{e}_\varphi$ .

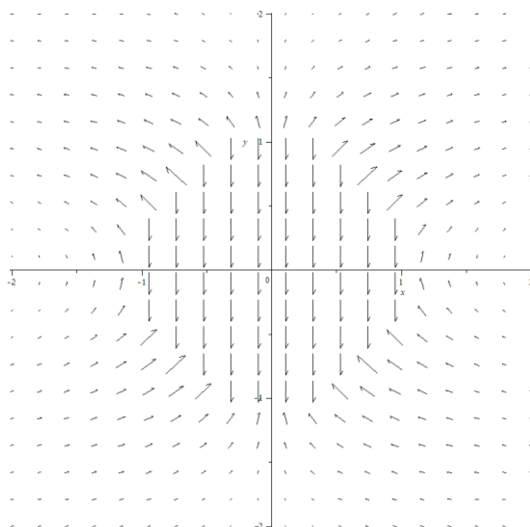


Abb. 9: Field-plot des Influenzfeldes im Bereich  $\pm 2r_0$ .

Schließlich bestimmen wir die Verlustleistung. Die Leistungsdichte ist  $\sigma \cdot j(r)^2 = \frac{1}{4} \sigma (v_x B_0)^2 \cdot (1 + \theta(r-1)(r^{-4} - 1))$  und an den Rändern der Scheibe stetig. Innerhalb der Scheibe ist sie einfach  $P_{\text{total},i} = \sigma (v_x B_0)^2 \cdot r_0^2 d \cdot \frac{\pi}{4}$ , da dort ja die Feldstärke auf die Hälfte reduziert ist. Außerhalb ergibt sich der selbe Verlust, so dass insgesamt gilt:

$$P_{\text{total},3} = \sigma (v_x B_0)^2 \cdot r_0^2 d \cdot \frac{\pi}{2}. \quad (15-3)$$

Das ist exakt die Hälfte der Verlustleistung, die im einfachen Bild mit der durch die Lorentz-Kraft erzeugten elektrischen Feldstärke suggeriert wird.

## Experiment 1

Ablaufen eines Modell-Zuges/-Autos von einer schiefen Ebene (Dieser Versuch wird in Ulm als V24 im GP durchgeführt). Mit linearem Reibungsterm wird die Bewegungsgleichung zu

$$m \cdot \dot{v} + \gamma \cdot v = \sin(\alpha) mg \quad (16)$$

mit der allgemeinen Lösung  $v = v_\infty \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ . Einsetzen in die Bewegungsgleichung und Vergleich mit (16) liefert

$$\gamma = \frac{m}{\tau} = \beta \sigma B_0^2 \cdot V, \tau = \frac{m}{\gamma} = \frac{m}{\beta \sigma B_0^2 V}, \text{ und } v_\infty = \sin(\alpha) \cdot \frac{mg}{\gamma} = \sin(\alpha) g \tau. \quad (17)$$

In Modell 1 ist  $\beta = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right)$ ,  $V = \pi r_0^2 d$ . Die Ablaufstrecke auf der schiefen Ebene ist

$$s(t) = v_\infty \cdot \left( t - \tau \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right) \quad (18)$$

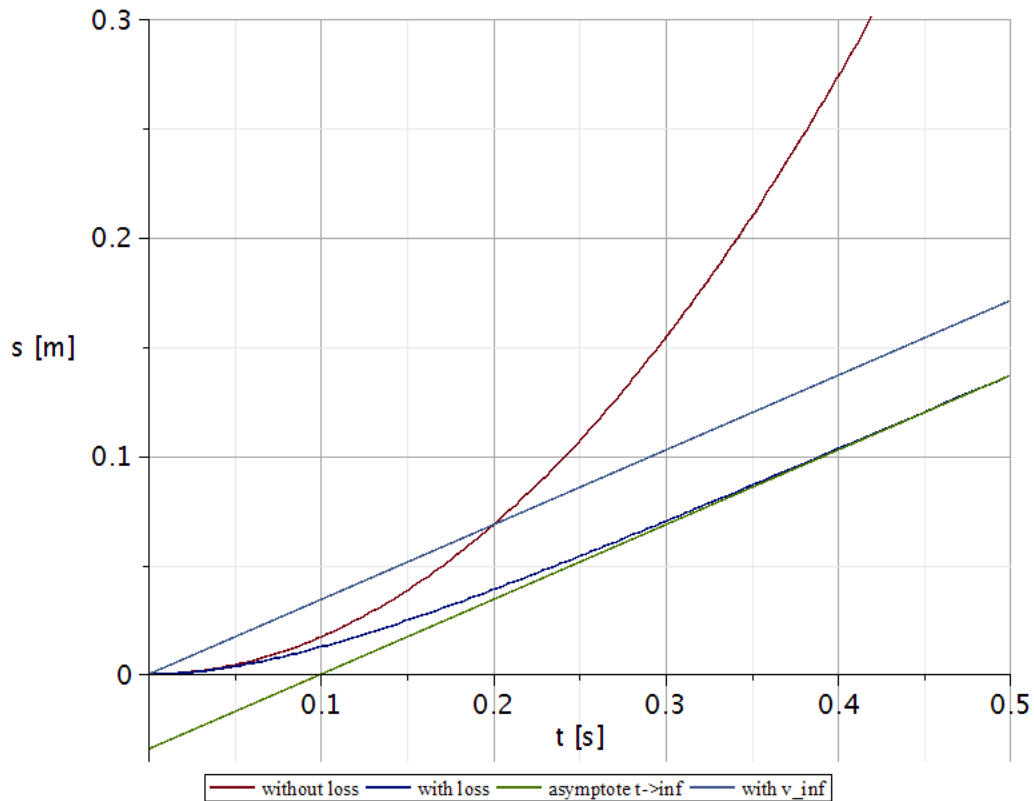
mit Startbedingung  $s(0) = v(0) = 0$ . Damit ergibt sich die Ablaufdauer für eine gegebene Strecke  $s$  zu

$$t(s) = \frac{s}{v_\infty} + \tau \cdot \left( 1 + \text{Lambert} \left( -e^{-1 - \frac{s}{v_\infty \tau}} \right) \right). \quad (19)$$

Hier ist Lambert(x) die Lösungsfunktion der Gleichung  $y = x \cdot e^x$ , die in Maple® als LambertW bezeichnet wird. Abbildung 11 zeigt die Graphen für den freien Ablauf des Wagens, den gebremsten Ablauf, den linearen Verlauf mit Geschwindigkeit  $v_\infty$ , und den asymptotischen gebremsten Verlauf für  $t \rightarrow \infty$  ( $\alpha = 20^\circ$ ,  $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ). Hieraus ergibt sich dann auch ein möglicher Lösungsansatz aus dem Experiment: Man misst für gegebenen Wagen und Ablauflänge  $s$  die Zeiten für ungebremsten ( $t_1$ ) und gebremsten Ablauf  $t_2$ . Dann gilt unabhängig von  $\alpha$  und  $g$  (!)

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2} \sin(\alpha) g t_1^2 = v_\infty \left( t_2 - \tau \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t_2}{\tau}} \right) \right) \\ \Rightarrow \frac{1}{2} t_1^2 &= \tau \left( t_2 - \tau \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t_2}{\tau}} \right) \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Gleichung (20) kann nicht analytisch aber numerisch gelöst werden (Maple:  $f\text{solve} \left( \frac{1}{2} t_1^2 = \tau \left( t_2 - \tau \left( 1 - e^{-\frac{t_2}{\tau}} \right) \right), \tau \right)$ ; . Man erhält aus der Lösung direkt  $\tau$ .



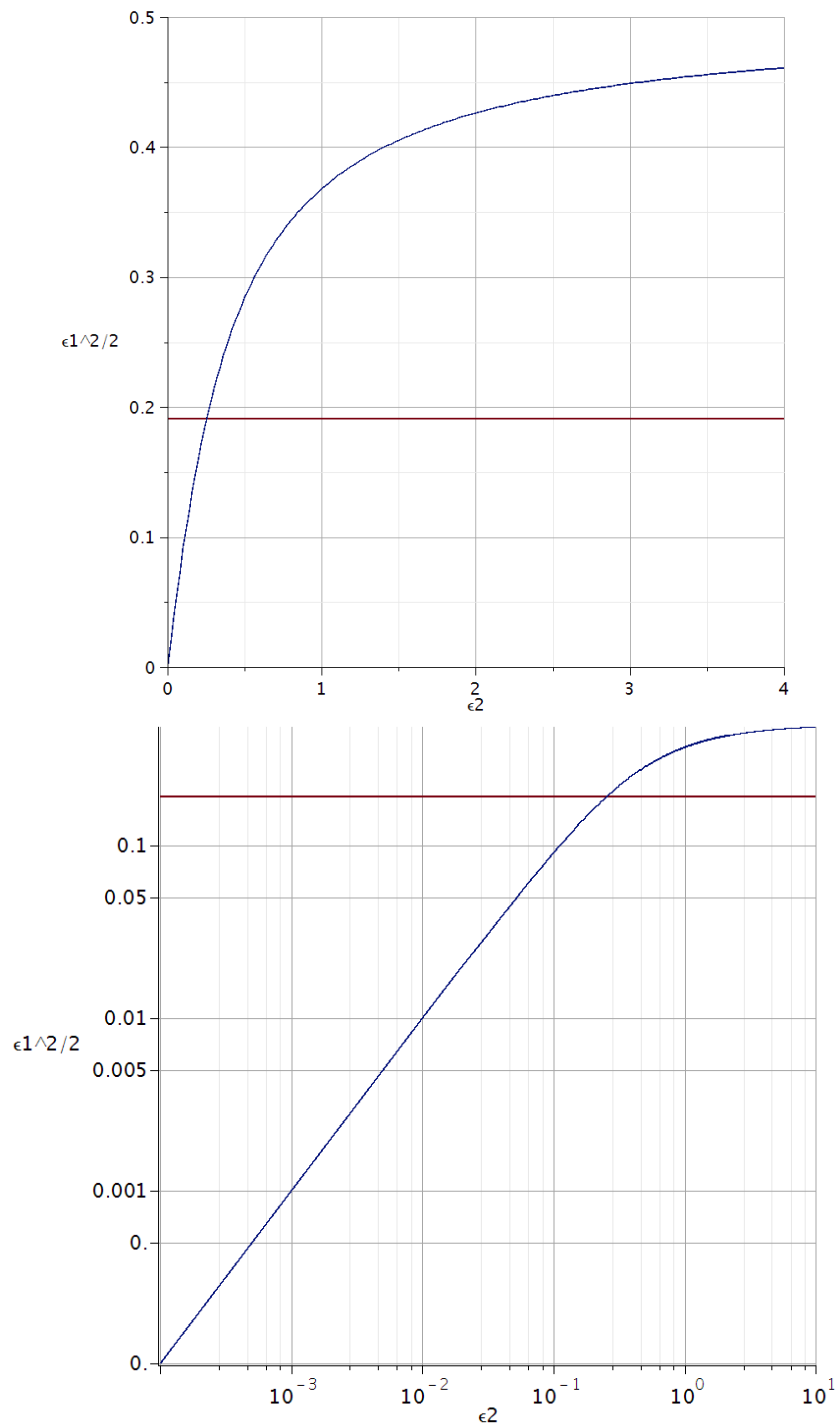
**Abbildung 11:** Beispiel für Ablauf bei  $\alpha = 20^\circ$ ,  $g = 10 \frac{m}{s^2}$ ,  $\tau = 0.1 s$ . Bei einem Wagen mit Masse  $10 g$  wäre dann  $\gamma = 0.1 \frac{kg}{s} = \beta \sigma B_0^2 \cdot V$  oder  $\beta B_0^2 \cdot V \sim 1.6 \times 10^{-9} T^2 m^3$ . Blau ist der ungebremste Fall, hellblau mit grüner Asymptote ist der gebremste Fall, braun ist parallel zu grün.

Es kann auch eine vereinfachte Ablesung aus einer normalisierten Darstellung verwendet werden in der Form

$$\frac{1}{2} \epsilon_1^2 = \epsilon_2 \left( 1 - \epsilon_2 \left( 1 - e^{-\frac{1}{\epsilon_2}} \right) \right) \text{ mit } \epsilon_1 = \frac{t_1}{t_2} \text{ und } \epsilon_2 = \frac{\tau}{t_2}. \quad (21)$$

In Abbildung 12 ist die rechte Seite der Gleichung geplottet, oben linear im Übergangsbereich, unten logarithmisch in einem größeren Bereich. Entlang der Ordinate trägt man  $\frac{1}{2} \frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{1}{2} \epsilon_1^2$  ab und sucht den dazugehörigen Abszissen-Wert; aus diesem wird  $\tau = x \cdot t_2$  bestimmt. (21) ist linear für kleine  $\epsilon_2$  (hohe Bremswirkung) mit  $\frac{1}{2} \epsilon_1^2 \approx \epsilon_2$  bzw.  $\tau = \frac{1}{2} \frac{t_1^2}{t_2}$  und sättigt bei 0.5 für  $\epsilon_2 \rightarrow \infty$ .





**Abbildung 12:** Die normalisierten Plots von Gleichung 21 zur graphischen Bestimmung von  $\tau$  aus  $t_1$  und  $t_2$ .

Überprüfung der Linearität von  $F_{\text{brems}} \sim v$ : Im Falle starker Bremskraft ( $\tau \ll t_2$ ) läuft der Wagen praktisch vollständig mit  $v_\infty$  den Hang hinab. Also wird  $v_\infty \approx \frac{s}{t_2} = \frac{\sin(\alpha)gm}{\beta\sigma B_0 V}$ . Man misst in diesem Limit  $t_2$  in Abhängigkeit von  $\alpha$  und plottet  $\frac{s}{t_2}$  gegen  $\sin(\alpha)$ ; die Steigung ist konstant und beträgt  $\frac{gm}{\beta\sigma B_0 V}$ . Anders herum gesagt: ist  $\tau$  unabhängig von  $\alpha$ , ist  $F_{\text{brems}} \sim v$  erfüllt!

Die mit Gleichungen (20,21) angegebenen Lösungsmethoden können gleichermaßen für Systeme angewendet werden, in denen eine geschwindigkeitsunabhängige Kraft (Rollreibung mit Koeffizient  $\eta$ ) den ablaufenden Wagen bremst. In Gl. (16ff.) sind der  $\sin(\alpha)$  jeweils durch  $\sin(\alpha) - \eta \cdot \cos(\alpha)$  zu ersetzen.

### Geräteliste:

Modell-Auto

Schiefe Ebene mit einstellbarer Neigung

2 Lichtschranken mit Start-Stopp-Uhr (1 ms Auflösung)

NdFeB-Magnete verschiedener Größe

Bleche (Kupfer Dicke (1.0, 2.0, 3.0) mm; Messing, Aluminium, Stahl mit Dicke 1.0 mm)

Ausgleichsgewichte gleicher Masse (Messing); Distanzstücke Dicke (1.0, 2.0, 3.0) mm (Kupfer)

Stahl-Maßband, Bügelmessschraube

Tesla-Meter (Hall-Sensor)

Setze  $g = 9.8082 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  (vgl. 43. Physikertagung 1979 in Ulm)

## Experiment 2

Der experimentelle Aufbau der Anordnung ist ganz ähnlich zu dem in Stuttgart verwendeten (Abb. 10) (Dieser Versuch wird im Ulmer GP nicht durchgeführt). Ein Elektromotor treibt eine Scheibe aus wählbarem Material (Kupfer, Aluminium, Stahl) an. Der Motor ist drehbar gelagert, daher kann man an ihm die Bremswirkung des fest installierten Elektromagneten als Drehmoment messen. Dieses Drehmoment wird über einen Hebelarm auf eine elektronische Waage übertragen und so gemessen. In Gegenrichtung muss die Drehung des Motors (am Hebelarm) gesperrt sein, sonst kann er die Scheibe nicht beschleunigen.



Abb. 10: Versuchsaufbau im Physikalischen Praktikum der Uni Stuttgart.

### Experimenteller Aufbau:

- Gestell mit stabiler Achse und reibungsarmen Kugellagern
- Aufsteckbarer Elektromotor mit 100 W Leistung bei 24 V/4.2 A, Netzteil dazu, 2 Multimeter zur Bestimmung der elektrischen Leistung
- Hebelarm zur Bestimmung des Drehmoments am Motor
- 3 Bremscheiben aus Kupfer/Aluminium/Stahl, 20 cm Radius, ca. 5 mm Dicke, leicht austauschbar
- (Kleine) Elektromagnete mit bis zu  $B_0 \approx 100 \text{ mT}$ , Radius  $r_0 = 1 \text{ cm}$ , Ferrit-Joch mit 1 cm Luftspalt für die Bremscheibe
- Hall-Sonde zu Messung des Magnetfeldes im Luftspalt
- Vorrichtung zur Messung der Drehzahl mit Reflexionslichtschranke
- Elektronische Waage zur Kraft-/Drehmomentmessung 500 g
- Teleskopisch zur Justage der Waage unter dem Hebelarm

- ? Reflexionslichtschranke mit Elektronik zur Messung der Rotationsgeschwindigkeit der Scheibe

### Abschätzung der Parameter:

- 3 Bremscheiben aus Kupfer/Aluminium/Stahl, ca. 20 cm Radius, ca. 5 mm Dicke: Massen 2.5 - 5.7 kg, Trägheitsmomente ca.  $\theta_t = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{\pi}{2}\rho_m R^4 d \approx 1.26 \times 10^{-5} \text{ m}^5 \cdot \rho_m \approx 0.05..0.11 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
- Rotationsgeschwindigkeit bis 10 U/s bzw.  $\omega \leq 60 \text{ s}^{-1}$ , Rotationsenergien bis  $E_{\text{rot}} \leq \frac{1}{2}\theta_t\omega^2 \approx 200 \text{ J}$ ; für Magnete auf  $r_m = 15.9 \text{ cm}$  gilt dann  $v_x \leq 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \rightarrow v_x \cdot B_0 \leq 1 \frac{\text{Tm}}{\text{s}}$
- Leitfähigkeiten: Kupfer  $6 \times 10^7 \text{ S m}$ , Alu  $4 \times 10^7 \text{ S m}$ , Stahl  $2 \times 10^6 \text{ S m}$
- Kleine Elektromagnete mit bis zu  $B_0 \leq 100 \text{ mT}$ , Radius  $r_0 = 1 \text{ cm}$ .
- Damit ist mit  $P_{\text{total},3} = \sigma(v_x B_0)^2 \cdot r_0^2 d \cdot \frac{\pi}{2} \leq 40 \text{ W}$  bzw. Bremskraft  $F_{\text{brems},3} \leq 4 \text{ N}$  bzw. Drehmoment  $M_{\text{brems},3} \leq 0.636 \text{ Nm}$  zu rechnen, für Stahl also  $P_{\text{total},3} \leq \frac{4}{3} \text{ W}$ ,  $F_{\text{brems},3} \leq 0,133 \text{ N}$ ,  $M_{\text{brems},3} \leq 0.021 \text{ Nm}$
- Die theoretische Auslaufzeit ist für Kupfer mindestens 5 s, für Stahl 150 s
- Für die Spule mit Luftspalt  $s = 1 \text{ cm}$  und max. Strom  $I_{\text{max}} = 4 \text{ A}$  werden ca.  $N \approx \frac{B_{\text{max}}}{\mu_0 \cdot I_{\text{max}}}$ .  
 $\left(\frac{l_{\text{Kern}}}{\mu_{\text{Kern}}} + s\right) \approx \frac{s \cdot B_{\text{max}}}{\mu_0 \cdot I_{\text{max}}} = 200$  Windungen benötigt mit Kernlänge  $l_{\text{Kern}}$  und Permeabilität  $\mu_{\text{Kern}}$

---

<sup>i</sup> Merke: eine elektrische Flächenladungsdichte produziert immer einen Sprung in der elektrischen Feldstärke! Das beste Beispiel hierfür ist der Plattenkondensator mit konstantem Feld innerhalb und Feld Null außerhalb des Kondensators.