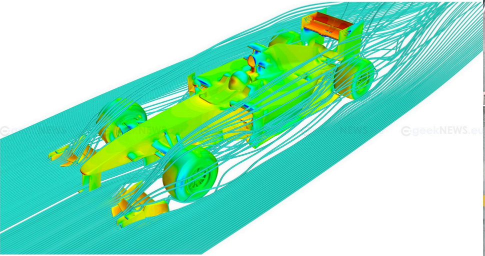
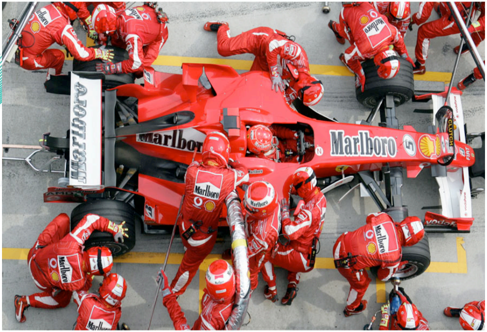
ulm university universität uulm





Karsten Urban
uzwr
ulmer zentrum für
wissenschaftliches rechnen

Wieso war Michael Schumachers Ferrari so schnell?

Wieso war Michael Schumachers Ferrari so schnell?

Einige mögliche Antworten: Weil Ferrari ...

- ... das Auto am Computer optimiert hat?

Wieso war Michael Schumachers Ferrari so schnell?

Einige mögliche Antworten: Weil Ferrari ...

- ... das Auto am Computer optimiert hat?
- ... der erste Rennstall mit einem Supercomputer war?

Wieso war Michael Schumachers Ferrari so schnell?

Einige mögliche Antworten: Weil Ferrari ...

- ... das Auto am Computer optimiert hat?
- ... der erste Rennstall mit einem Supercomputer war?
- ... das Auto <u>während des Rennens</u> optimiert hat?

Wieso war Michael Schumachers Ferrari so schnell?

Einige mögliche Antworten: Weil Ferrari ...

- ... das Auto am Computer optimiert hat?
- ... der erste Rennstall mit einem Supercomputer war?
- ... das Auto <u>während des Rennens</u> optimiert hat?
- ... dazu clevere Mathematik eingesetzt hat?

Wieso war Michael Schumachers Ferrari so schnell?

Einige mögliche Antworten: Weil Ferrari ...

- ... das Auto am Computer optimiert hat!
- ... der erste Rennstall mit einem Supercomputer war!
- ... das Auto <u>während des Rennens</u> optimiert hat!
- ... dazu clevere Mathematik eingesetzt hat!

Wieso war Michael Schumachers Ferrari so schnell?

Einige mögliche Antworten: Weil Ferrari ...

- ... das Auto am Computer optimiert hat!
- ... der erste Rennstall mit einem Supercomputer war!
- ... das Auto während des Rennens optimiert hat!
- ... dazu clevere Mathematik eingesetzt hat!

Und wie geht das?

Das erwartet Sie heute noch ...

1. Mathematische Modellierung
   - Transportprozesse
   - Von der Bilanzgleichung zur Differenzialgleichung
   - Die lineare Transportgleichung
   - Die Navier-Stokes-Gleichungen
2. Numerische Simulation - das virtuelle Auto
   - Diskretisierung
   - Simulation
3. Und die Realität?
4. Optimierung: Schneller, höher, weiter
   - Ziel: Der "optimale" Ferrari
   - Wie in der Schule
   - Und bei Ferrari?
5. Und das während des Rennens?
   - Anwendungen der RBM
6. Zusammenfassung

Mathematische Modellierung

- Modelle gibt es viele

Mathematische Modellierung

- Modelle gibt es viele
- Was ist ein „mathematisches“ Modell?

Mathematische Modellierung

- Modelle gibt es viele
- Was ist ein „mathematisches“ Modell?

Reales Phänomen

- Ferrari Formel 1-Auto
- Schiffsströmung
- Knochenheilung
- ...

Mathematische Modellierung

- Modelle gibt es viele
- Was ist ein „mathematisches“ Modell?

Reales Phänomen

- Ferrari Formel 1-Auto
- Schiffsströmung
- Knochenheilung
- ...

$\Downarrow$

Naturgesetze, z.B.

- Energieerhaltung
- Masseerhaltung
- Physikalische / Chemische Gesetze
- Vereinfachungen
- ...

Mathematische Modellierung

- Modelle gibt es viele
- Was ist ein „mathematisches“ Modell?

Reales Phänomen

- Ferrari Formel 1-Auto
- Schiffsströmung
- Knochenheilung
- ...

$\Downarrow$

Naturgesetze, z.B.

- Energieerhaltung
- Masseerhaltung
- Physikalische / Chemische Gesetze
- Vereinfachungen
- ...

$\Rightarrow$

Mathematik, z.B.

- Analysis, Lineare Algebra
- Mathematische Physik
- Grenzübergänge
- Stochastik, Statistik
- ...

Mathematische Modellierung

- Modelle gibt es viele
- Was ist ein „mathematisches“ Modell?

Reales Phänomen
- Ferrari Formel 1-Auto
- Schiffsströmung
- Knochenheilung
- ...

$\Downarrow$

Naturgesetze, z.B.
- Energieerhaltung
- Masseerhaltung
- Physikalische / Chemische Gesetze
- Vereinfachungen
- ...

$\Rightarrow$

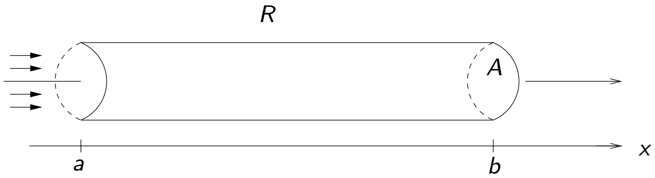
Mathematik, z.B.
- Analysis, Lineare Algebra
- Mathematische Physik
- Grenzübergänge
- Stochastik, Statistik
- ...

$\Uparrow$

Mathematische Gleichungen, z.B.
- Algebraische Gleichungen
- Differenzialgleichungen
- Integralgleichungen
- Ungleichungen
- ...

Modellierung von Transportprozessen

Dünnes Rohr R mit konstantem Querschnitt $A \in \mathbb{R}^+$ (in m^2).



Vereinfachende Annahmen:

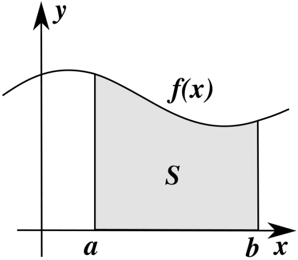
- das Rohr sei dünn, d.h., der Querschnitt A sei als „klein" vorausgesetzt
- wir berücksichtigen nur die Strömung in horizontaler Richtung

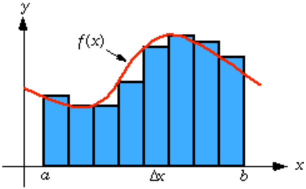
Zur Erinnerung / Einführung: Integral

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion

Zur Erinnerung / Einführung: Integral

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion
- stetig



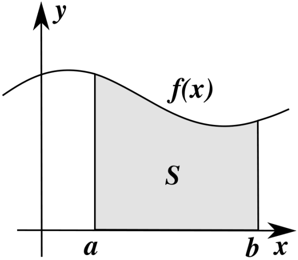


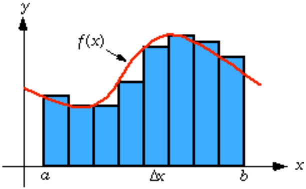
Zur Erinnerung / Einführung: Integral

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion
- stetig
- Das Integral

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

ist die Fläche unterhalb von f zwischen a und b





Bilanzgleichungen 1/3

- Ziel: Mathematische Beschreibung der Wasserströmung durch R
  Verwende dazu: Masseerhaltung:

$$\text{Wassermassendifferenz} = \text{Zustrom} - \text{Abfluss} + \text{Quellen}.$$

Bilanzgleichungen 1/3

- Ziel: Mathematische Beschreibung der Wasserströmung durch R
  Verwende dazu: Masseerhaltung:

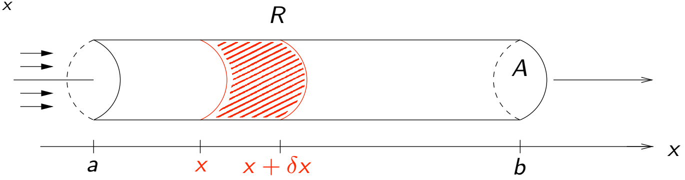
  $$\text{Wassermassendifferenz} = \text{Zustrom} - \text{Abfluss} + \text{Quellen}.$$
- $u = u(t, x)$ sei die Dichte des Wassers (t: Zeit; x: Ort)

Bilanzgleichungen 1/3

- Ziel: Mathematische Beschreibung der Wasserströmung durch R
  Verwende dazu: Masseerhaltung:

  $$\text{Wassermassendifferenz} = \text{Zustrom} - \text{Abfluss} + \text{Quellen.}$$
- $u = u(t, x)$ sei die Dichte des Wassers (t: Zeit; x: Ort)
- Wassermenge in $[x, x + \delta x]$ (δx „klein") zum Zeitpunkt t:

$$\int_x^{x+\delta x} u(t, y)\, A\, dy. \tag{1}$$



Bilanzgleichungen 1/3

- Ziel: Mathematische Beschreibung der Wasserströmung durch R
  Verwende dazu: Masseerhaltung:

  $$\text{Wassermassendifferenz} = \text{Zustrom} - \text{Abfluss} + \text{Quellen}.$$

- $u = u(t, x)$ sei die Dichte des Wassers (t: Zeit; x: Ort)
- Wassermenge in $[x, x + \delta x]$ (δx „klein“) zum Zeitpunkt t:

  $$\int_x^{x+\delta x} u(t, y)\, A\, dy. \tag{1}$$

- Nun: Wasserfluss in der Zeitspanne von t bis $t + \delta t$, $\delta t > 0$, $t \in \mathbb{R}$

Bilanzgleichungen 1/3

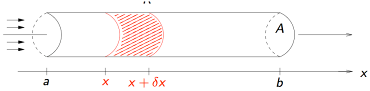
- Ziel: Mathematische Beschreibung der Wasserströmung durch R
  Verwende dazu: Masseerhaltung:

  Wassermassendifferenz $=$ Zustrom $-$ Abfluss $+$ Quellen.
- $u = u(t, x)$ sei die Dichte des Wassers (t: Zeit; x: Ort)
- Wassermenge in $[x, x + \delta x]$ (δx „klein") zum Zeitpunkt t:

$$\int_x^{x+\delta x} u(t, y)\, A\, dy. \tag{1}$$

- Nun: Wasserfluss in der Zeitspanne von t bis $t + \delta t$, $\delta t > 0$, $t \in \mathbb{R}$
- Die Differenz der Wassermenge zu beiden Zeiten lautet:

$$\int_x^{x+\delta x} (u(t + \delta t, y) - u(t, y))\, A\, dy.$$



Bilanzgleichungen 1/3

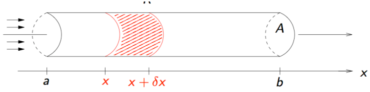
- Ziel: Mathematische Beschreibung der Wasserströmung durch R
  Verwende dazu: Masseerhaltung:

  Wassermassendifferenz = Zustrom − Abfluss + Quellen.
- $u = u(t, x)$ sei die Dichte des Wassers (t: Zeit; x: Ort)
- Wassermenge in $[x, x + \delta x]$ (δx „klein“) zum Zeitpunkt t:

$$\int_x^{x+\delta x} u(t, y)\, A\, dy. \tag{1}$$

- Nun: Wasserfluss in der Zeitspanne von t bis $t + \delta t$, $\delta t > 0$, $t \in \mathbb{R}$
- Die Differenz der Wassermenge zu beiden Zeiten lautet:

$$\int_x^{x+\delta x} (u(t + \delta t, y) - u(t, y))\, A\, dy.$$



- Frage: Wodurch kann sich die Menge zwischen t und $t + \delta t$ ändern?
  - den Wasserfluss,
  - eine mögliche Quelle oder Senke.

Bilanzgleichungen 2/3

- Wasserfluss $\psi(t, x)$: gibt an, wie viel Wasser pro Sekunde und pro Quadratmeter durch den Rohrquerschnitt fließt

Bilanzgleichungen 2/3

- Wasserfluss $\psi(t, x)$: gibt an, wie viel Wasser pro Sekunde und pro Quadratmeter durch den Rohrquerschnitt fließt
- Die Wassermenge, die in $[t, t + \delta t]$ durch das Rohr fließt ist, lautet

$$\int_t^{t+\delta t} A\,\psi(\tau, x)\, d\tau$$

Bilanzgleichungen 2/3

- Wasserfluss $\psi(t,x)$: gibt an, wie viel Wasser pro Sekunde und pro Quadratmeter durch den Rohrquerschnitt fließt
- Die Wassermenge, die in $[t, t+\delta t]$ durch das Rohr fließt ist, lautet

$$\int_t^{t+\delta t} A\,\psi(\tau,x)\,d\tau$$

- eine Quelle oder Senke wird durch eine Funktion $f = f(t,x)$ beschrieben (Wassermenge, die pro Quadratmeter und Sekunde erzeugt wird)

Bilanzgleichungen 2/3

- Wasserfluss $\psi(t,x)$: gibt an, wie viel Wasser pro Sekunde und pro Quadratmeter durch den Rohrquerschnitt fließt
- Die Wassermenge, die in $[t, t+\delta t]$ durch das Rohr fließt ist, lautet

$$\int_t^{t+\delta t} A\,\psi(\tau,x)\,d\tau$$

- eine Quelle oder Senke wird durch eine Funktion $f = f(t,x)$ beschrieben (Wassermenge, die pro Quadratmeter und Sekunde erzeugt wird)
- Die Wassermenge, die erzeugt (oder abgegeben) wird, ist

$$\int_t^{t+\delta t} \int_x^{x+\delta x} f(\tau,y)\,A\,dy\,d\tau \qquad (2)$$

Bilanzgleichungen 2/3

- Wasserfluss $\psi(t,x)$: gibt an, wie viel Wasser pro Sekunde und pro Quadratmeter durch den Rohrquerschnitt fließt
- Die Wassermenge, die in $[t, t+\delta t]$ durch das Rohr fließt ist, lautet

$$\int_t^{t+\delta t} A\,\psi(\tau,x)\,d\tau$$

- eine Quelle oder Senke wird durch eine Funktion $f = f(t,x)$ beschrieben (Wassermenge, die pro Quadratmeter und Sekunde erzeugt wird)
- Die Wassermenge, die erzeugt (oder abgegeben) wird, ist

$$\int_t^{t+\delta t} \int_x^{x+\delta x} f(\tau,y)\,A\,dy\,d\tau \qquad (2)$$

- Ist $f > 0$: Quelle, falls $f < 0$: Senke.

Bilanzgleichungen 3/3

- Prinzip der Masseerhaltung: Masse kann in einem geschlossenen System weder erzeugt noch zerstört werden

Bilanzgleichungen 3/3

- Prinzip der Masseerhaltung: Masse kann in einem geschlossenen System weder erzeugt noch zerstört werden
- Bilanzgleichung:
  - Zunächst in Worten:

$$\text{Wassermassendifferenz} = \text{Zustrom} - \text{Abfluss} + \text{Quellen.}$$

Bilanzgleichungen 3/3

- Prinzip der Masseerhaltung: Masse kann in einem geschlossenen System weder erzeugt noch zerstört werden
- Bilanzgleichung:
  - Zunächst in Worten:

    Wassermassendifferenz = Zustrom − Abfluss + Quellen.
  - Einsetzen der oben hergeleiteten Terme ergibt:

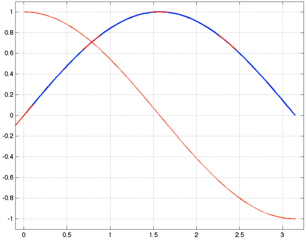
Bilanzgleichung

$$\int_x^{x+\delta x} A(u(t+\delta t, y) - u(t,y))dy =$$

$$= \int_t^{t+\delta t} (A\,\psi(\tau, x) - A\,\psi(\tau, x+\delta x))\, d\tau + \int_t^{t+\delta t}\int_x^{x+\delta x} f(\tau, y)\, A\, dy\, d\tau \tag{3}$$

Zur Erinnerung / Einführung: Ableitungen

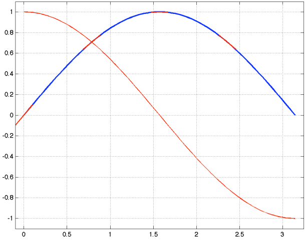
- Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



Zur Erinnerung / Einführung: Ableitungen

- Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Ableitung: Steigung (der Tangente)

$$f'(x) = \frac{\partial}{\partial x} f(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}$$

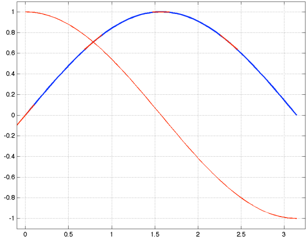


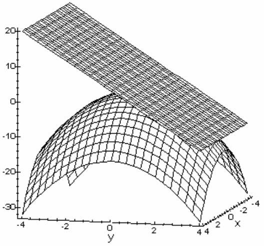
Zur Erinnerung / Einführung: Ableitungen

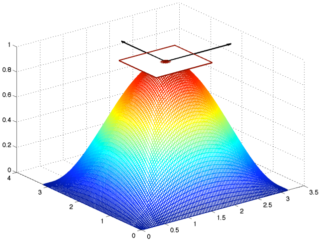
- Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Ableitung: Steigung (der Tangente)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\partial}{\partial x} f(x) \\ &= \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} \end{aligned}$$

- Mehrdimensional: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
  $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y), \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \right)$: „Gradient“







Von der Bilanz- zur Differenzialgleichung 1/3

Bilanzgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{u(t+\delta t, x) - u(t,x)}{\delta t}$$

$$\int_x^{x+\delta x} A(u(t+\delta t, y) - u(t,y))dy = \int_t^{t+\delta t} (A\,\psi(\tau,x) - A\,\psi(\tau, x+\delta x))\,d\tau + \int_t^{t+\delta t} \int_x^{x+\delta x} f(\tau,y)\,A\,dy\,d\tau \tag{3}$$

Von der Bilanz- zur Differenzialgleichung 1/3

Bilanzgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{u(t+\delta t, x) - u(t,x)}{\delta t}$$

$$\int_x^{x+\delta x} A(u(t+\delta t, y) - u(t,y))dy = \int_t^{t+\delta t} (A\,\psi(\tau,x) - A\,\psi(\tau, x+\delta x))\,d\tau + \int_t^{t+\delta t} \int_x^{x+\delta x} f(\tau,y)\,A\,dy\,d\tau \qquad (3)$$

- u und ψ können in Zeit und Ort stark variieren.

Von der Bilanz- zur Differenzialgleichung 1/3

Bilanzgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{u(t+\delta t, x) - u(t,x)}{\delta t}$$

$$\int_x^{x+\delta x} A(u(t+\delta t, y) - u(t,y))dy = \int_t^{t+\delta t} (A\,\psi(\tau,x) - A\,\psi(\tau, x+\delta x))\,d\tau + \int_t^{t+\delta t} \int_x^{x+\delta x} f(\tau,y)\,A\,dy\,d\tau \qquad (3)$$

- u und ψ können in Zeit und Ort stark variieren.

$\rightsquigarrow$ Die Bilanzgleichung (3) ist umso genauer,
je kleiner Zeit- und Ortsintervall δt bzw. δx sind.

Von der Bilanz- zur Differenzialgleichung 1/3

Bilanzgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{u(t+\delta t, x) - u(t,x)}{\delta t}$$

$$\int_x^{x+\delta x} A(u(t+\delta t, y) - u(t,y))dy = \int_t^{t+\delta t} (A\,\psi(\tau,x) - A\,\psi(\tau, x+\delta x))\,d\tau + \int_t^{t+\delta t} \int_x^{x+\delta x} f(\tau,y)\,A\,dy\,d\tau \qquad (3)$$

- u und ψ können in Zeit und Ort stark variieren.

⇝ Die Bilanzgleichung (3) ist umso genauer, je kleiner Zeit- und Ortsintervall δt bzw. δx sind.

- Teile (3) durch $(A\,\delta t)$ und gehe zum Grenzwert $\delta t \to 0$ über: (Annahmen ...)

$$\int_x^{x+\delta x} \frac{\partial}{\partial t} u(t,y)\,dy = \psi(t,x) - \psi(t, x+\delta x) + \int_x^{x+\delta x} f(t,y)\,dy.$$

Von der Bilanz- zur Differenzialgleichung 2/3

So weit sind wir jetzt ...

$$\int_x^{x+\delta x} \frac{\partial}{\partial t} u(t,y)\, dy = \psi(t,x) - \psi(t,x+\delta x) + \int_x^{x+\delta x} f(t,y)\, dy.$$

Von der Bilanz- zur Differenzialgleichung 2/3

So weit sind wir jetzt ...

$$\int_x^{x+\delta x} \frac{\partial}{\partial t} u(t,y)\,dy = \psi(t,x) - \psi(t,x+\delta x) + \int_x^{x+\delta x} f(t,y)\,dy.$$

Ableitung nach x

$$\frac{\partial}{\partial x} u(t,x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{u(t,x+\delta x) - u(t,x)}{\delta x}$$

- Division durch δx und Grenzübergang $\delta x \to 0$ liefert (Annahmen ...)

Erhaltungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = -\frac{\partial}{\partial x}\psi(t,x) + f(t,x), \qquad \text{kurz} \qquad u_t + \psi_x = f \tag{4}$$

Von der Bilanz- zur Differenzialgleichung 2/3

So weit sind wir jetzt ...

$$\int_x^{x+\delta x} \frac{\partial}{\partial t} u(t,y)\, dy = \psi(t,x) - \psi(t,x+\delta x) + \int_x^{x+\delta x} f(t,y)\, dy.$$

Ableitung nach x

$$\frac{\partial}{\partial x} u(t,x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{u(t,x+\delta x) - u(t,x)}{\delta x}$$

- Division durch δx und Grenzübergang $\delta x \to 0$ liefert (Annahmen ...)

Erhaltungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = -\frac{\partial}{\partial x} \psi(t,x) + f(t,x), \qquad \text{kurz} \qquad u_t + \psi_x = f \tag{4}$$

- u kann auch die Dichte irgendeiner anderen Größe sein: Energie, Ladung, Bakterien, Teilchen, Autos, Moleküle etc.

Von der Bilanz- zur Differenzialgleichung 2/3

So weit sind wir jetzt ...

$$\int_x^{x+\delta x} \frac{\partial}{\partial t} u(t,y)\, dy = \psi(t,x) - \psi(t,x+\delta x) + \int_x^{x+\delta x} f(t,y)\, dy.$$

Ableitung nach x

$$\frac{\partial}{\partial x} u(t,x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{u(t,x+\delta x) - u(t,x)}{\delta x}$$

- Division durch δx und Grenzübergang $\delta x \to 0$ liefert (Annahmen ...)

Erhaltungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = -\frac{\partial}{\partial x} \psi(t,x) + f(t,x), \qquad \text{kurz} \qquad u_t + \psi_x = f \tag{4}$$

- u kann auch die Dichte irgendeiner anderen Größe sein: Energie, Ladung, Bakterien, Teilchen, Autos, Moleküle etc.
- $u = u(t,x)$ heißt allgemein auch Zustandsvariable.

Von der Bilanz- zur Differenzialgleichung 3/3

Erhaltungsgleichung ($u_t + \psi_x = f$)

Frage: Hat diese Gleichung eine (eindeutige) Lösung?

Von der Bilanz- zur Differenzialgleichung 3/3

Erhaltungsgleichung ($u_t + \psi_x = f$)

Frage: Hat diese Gleichung eine (eindeutige) Lösung?

- 1 Gleichung, 2 Unbekante

Von der Bilanz- zur Differenzialgleichung 3/3

Erhaltungsgleichung ($u_t + \psi_x = f$)

Frage: Hat diese Gleichung eine (eindeutige) Lösung?

- 1 Gleichung, 2 Unbekante
- Man braucht einen Zusammenhang von ψ und Zustand u: $\psi = \psi(u)$

Von der Bilanz- zur Differenzialgleichung 3/3

Erhaltungsgleichung ($u_t + \psi_x = f$)

Frage: Hat diese Gleichung eine (eindeutige) Lösung?

- 1 Gleichung, 2 Unbekante
- Man braucht einen Zusammenhang von ψ und Zustand u: $\psi = \psi(u)$
- Beispiel: $\psi(t, x) = \psi(t, x, u(t, x))$ (Flussfunktion)

Von der Bilanz- zur Differenzialgleichung 3/3

Erhaltungsgleichung ($u_t + \psi_x = f$)

Frage: Hat diese Gleichung eine (eindeutige) Lösung?

- 1 Gleichung, 2 Unbekante
- Man braucht einen Zusammenhang von ψ und Zustand u: $\psi = \psi(u)$
- Beispiel: $\psi(t,x) = \psi(t,x,u(t,x))$ (Flussfunktion)
- Dann wird die Gleichung eine (partielle) Differenzialgleichung

Partielle Differenzialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) + \frac{\partial}{\partial x} \psi(t,x,u(t,x)) = f(t,x).$$

Die lineare Transportgleichung

- Beispiel der Wasserröhre

Die lineare Transportgleichung

- Beispiel der Wasserröhre
- Vereinfachende Annahmen:
  - $f = 0$ (keine Quellen und Senken)

Die lineare Transportgleichung

- Beispiel der Wasserröhre
- Vereinfachende Annahmen:
  - $f = 0$ (keine Quellen und Senken)
  - Wasser bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit $c \in \mathbb{R}$

Die lineare Transportgleichung

- Beispiel der Wasserröhre
- Vereinfachende Annahmen:
  - $f = 0$ (keine Quellen und Senken)
  - Wasser bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit $c \in \mathbb{R}$

  $\rightsquigarrow$ Wasserfluss: die Flussfunktion lautet also

$$\psi = \psi(t, x, u) := c \cdot u(t, x), \quad c \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

(Fluss ist proportional zur Dichte u)

Die lineare Transportgleichung

- Beispiel der Wasserröhre
- Vereinfachende Annahmen:
  - $f = 0$ (keine Quellen und Senken)
  - Wasser bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit $c \in \mathbb{R}$

  $\rightsquigarrow$ Wasserfluss: die Flussfunktion lautet also

  $$\psi = \psi(t, x, u) := c \cdot u(t, x), \quad c \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

  (Fluss ist proportional zur Dichte u)
- Damit wird die Erhaltungsgleichung hier zu

Lineare Transportgleichung (Konvektionsgleichung, Advektionsgleichung)

$$u_t + c\, u_x = 0, \quad u(0, x) = u_0(x) \tag{6}$$

Die lineare Transportgleichung

- Beispiel der Wasserröhre
- Vereinfachende Annahmen:
  - $f = 0$ (keine Quellen und Senken)
  - Wasser bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit $c \in \mathbb{R}$

  $\rightsquigarrow$ Wasserfluss: die Flussfunktion lautet also

  $$\psi = \psi(t, x, u) := c \cdot u(t, x), \quad c \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

  (Fluss ist proportional zur Dichte u)
- Damit wird die Erhaltungsgleichung hier zu

Lineare Transportgleichung (Konvektionsgleichung, Advektionsgleichung)

$$u_t + c\, u_x = 0, \quad u(0, x) = u_0(x) \tag{6}$$

- Dies ist eine lineare, homogene Differenzialgleichung.

Die lineare Transportgleichung

- Beispiel der Wasserröhre
- Vereinfachende Annahmen:
  - $f = 0$ (keine Quellen und Senken)
  - Wasser bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit $c \in \mathbb{R}$

  $\rightsquigarrow$ Wasserfluss: die Flussfunktion lautet also

$$\psi = \psi(t, x, u) := c \cdot u(t, x), \quad c \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

  (Fluss ist proportional zur Dichte u)
- Damit wird die Erhaltungsgleichung hier zu

Lineare Transportgleichung (Konvektionsgleichung, Advektionsgleichung)

$$u_t + c\, u_x = 0, \quad u(0, x) = u_0(x) \tag{6}$$

- Dies ist eine lineare, homogene Differenzialgleichung.
- Sie hat eine eindeutige Lösung, die stetig von c und u_0 abhängt
  Das Problem ist korrekt gestellt (Hadarmard, 1906).

Die lineare Transportgleichung

- Beispiel der Wasserröhre
- Vereinfachende Annahmen:
  - $f = 0$ (keine Quellen und Senken)
  - Wasser bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit $c \in \mathbb{R}$
  - $\rightsquigarrow$ Wasserfluss: die Flussfunktion lautet also

$$\psi = \psi(t, x, u) := c \cdot u(t, x), \quad c \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

(Fluss ist proportional zur Dichte u)

- Damit wird die Erhaltungsgleichung hier zu

Lineare Transportgleichung (Konvektionsgleichung, Advektionsgleichung)

$$u_t + c\, u_x = 0, \quad u(0, x) = u_0(x) \tag{6}$$

- Dies ist eine lineare, homogene Differenzialgleichung.
- Sie hat eine eindeutige Lösung, die stetig von c und u_0 abhängt
  Das Problem ist korrekt gestellt (Hadarmard, 1906).
- Man kennt eine Formel: $u(t, x) = u_0(x - c\, t)$

Und die Gleichungen beim Ferrari?

- Navier-Stokes-Gleichungen $[\mu, \nu \in \mathbb{R},\ \vec{f} = (f_1, \ldots, f_n)]$

$$\begin{aligned} \vec{u}_t - \mu\,\Delta\vec{u} + \nu(\vec{u}\cdot\nabla)\,\vec{u} + \nabla\,p &= \vec{f} \\ \operatorname{div}\vec{u} &= 0 \end{aligned}$$

- Grundgleichungen der Strömungsmechanik

Und die Gleichungen beim Ferrari?

- Navier-Stokes-Gleichungen $[\mu, \nu \in \mathbb{R},\ \vec{f} = (f_1, \ldots, f_n)]$

$$\begin{aligned} \vec{u}_t - \mu\,\Delta\vec{u} + \nu(\vec{u}\cdot\nabla)\,\vec{u} + \nabla\,p &= \vec{f} \\ \operatorname{div}\vec{u} &= 0 \end{aligned}$$

- Grundgleichungen der Strömungsmechanik
- Gesucht:
  - Geschwindigkeit: $\vec{u}(t,x) = (u_1(t,x), \ldots, u_n(t,x)) \in \mathbb{R}^n$
  - Druck: $p(t,x) \in \mathbb{R}$

Und die Gleichungen beim Ferrari?

- Navier-Stokes-Gleichungen $[\mu, \nu \in \mathbb{R},\ \vec{f} = (f_1, \dots, f_n)]$

$$\begin{aligned} \vec{u}_t - \mu\,\Delta\vec{u} + \nu(\vec{u}\cdot\nabla)\,\vec{u} + \nabla\,p &= \vec{f} \\ \operatorname{div}\vec{u} &= 0 \end{aligned}$$

- Grundgleichungen der Strömungsmechanik
- Gesucht:
  - Geschwindigkeit: $\vec{u}(t,x) = (u_1(t,x), \dots, u_n(t,x)) \in \mathbb{R}^n$
  - Druck: $p(t,x) \in \mathbb{R}$

Korrektgestelltheit der Navier-Stokes-Gleichungen

- Existenz einer Lösung?

Und die Gleichungen beim Ferrari?

- Navier-Stokes-Gleichungen $[\mu, \nu \in \mathbb{R}, \vec{f} = (f_1, \dots, f_n)]$

$$\begin{aligned} \vec{u}_t - \mu \, \Delta \vec{u} + \nu (\vec{u} \cdot \nabla) \, \vec{u} + \nabla \, p &= \vec{f} \\ \operatorname{div} \vec{u} &= 0 \end{aligned}$$

- Grundgleichungen der Strömungsmechanik
- Gesucht:
  - Geschwindigkeit: $\vec{u}(t, x) = (u_1(t, x), \dots, u_n(t, x)) \in \mathbb{R}^n$
  - Druck: $p(t, x) \in \mathbb{R}$

Korrektgestelltheit der Navier-Stokes-Gleichungen

- Existenz einer Lösung?
- Eindeutigkeit $\lightning$

Und die Gleichungen beim Ferrari?

- Navier-Stokes-Gleichungen $[\mu, \nu \in \mathbb{R},\ \vec{f} = (f_1, \ldots, f_n)]$

$$\begin{aligned} \vec{u}_t - \mu\,\Delta\vec{u} + \nu(\vec{u}\cdot\nabla)\,\vec{u} + \nabla\,p &= \vec{f} \\ \operatorname{div}\vec{u} &= 0 \end{aligned}$$

- Grundgleichungen der Strömungsmechanik
- Gesucht:
  - Geschwindigkeit: $\vec{u}(t,x) = (u_1(t,x), \ldots, u_n(t,x)) \in \mathbb{R}^n$
  - Druck: $p(t,x) \in \mathbb{R}$

Korrektgestelltheit der Navier-Stokes-Gleichungen

- Existenz einer Lösung?
- Eindeutigkeit $\lightning$
- Stabilität $\lightning$

Und die Gleichungen beim Ferrari?

- Navier-Stokes-Gleichungen $[\mu, \nu \in \mathbb{R},\ \vec{f} = (f_1, \dots, f_n)]$

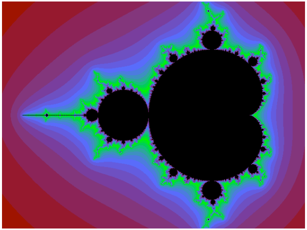
$$\begin{aligned} \vec{u}_t - \mu\,\Delta\vec{u} + \nu(\vec{u}\cdot\nabla)\,\vec{u} + \nabla\,p &= \vec{f} \\ \operatorname{div}\vec{u} &= 0 \end{aligned}$$

- Grundgleichungen der Strömungsmechanik
- Gesucht:
  - Geschwindigkeit: $\vec{u}(t,x) = (u_1(t,x), \dots, u_n(t,x)) \in \mathbb{R}^n$
  - Druck: $p(t,x) \in \mathbb{R}$

Korrektgestelltheit der Navier-Stokes-Gleichungen

- Existenz einer Lösung?
- Eindeutigkeit $\lightning$
- Stabilität $\lightning$
- Lösungsformel $\lightning$

Warum sind die Navier-Stokes-Gleichungen so schwer?



- Chaotisches System

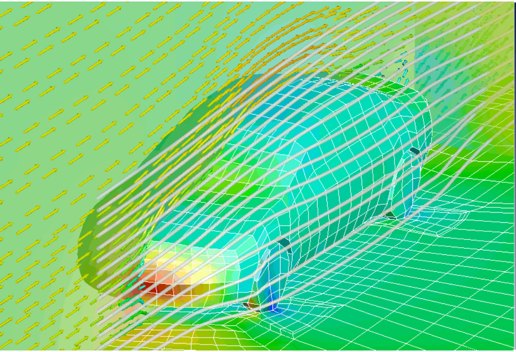
Warum sind die Navier-Stokes-Gleichungen so schwer?

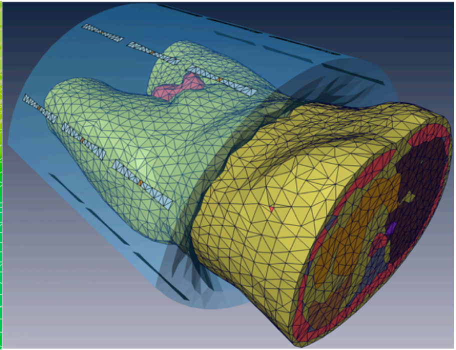
- Chaotisches System

Warum sind die Navier-Stokes-Gleichungen so schwer?

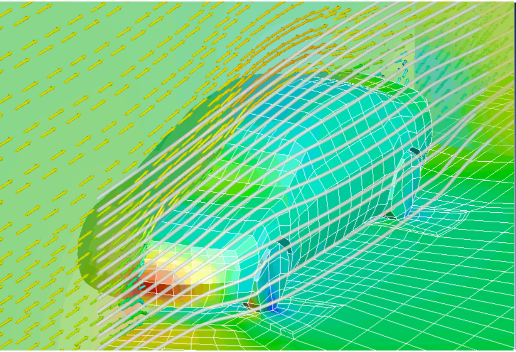
- Chaotisches System
- Turbulenz

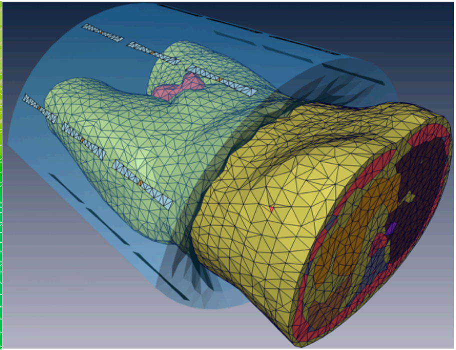
„Rechengitter“





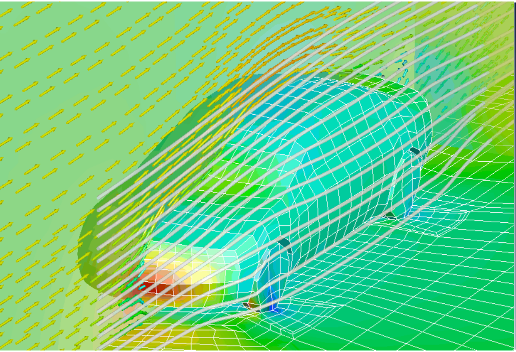
„Rechengitter“

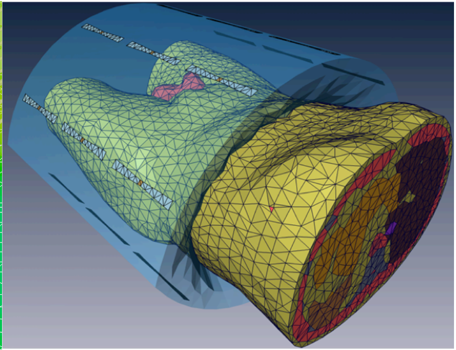




- Unbekannte werden an jedem Gitterpunkt approximiert

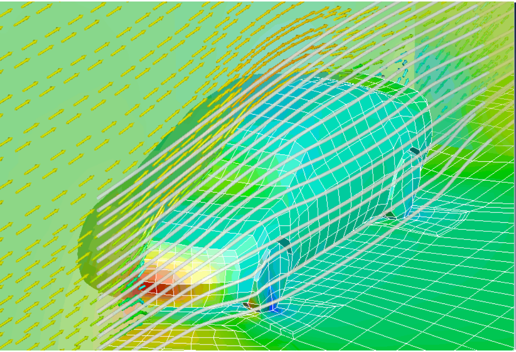
„Rechengitter“

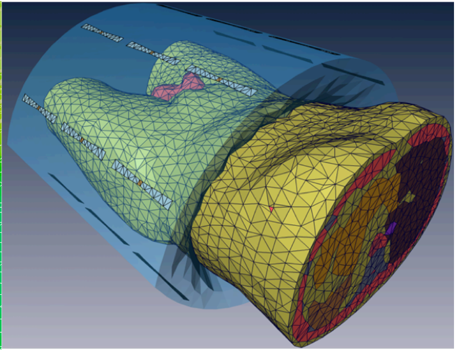




- Unbekannte werden an jedem Gitterpunkt approximiert
- Unbekannte bei Navier-Stokes:
  - Geschwindigkeit: 3
  - Druck: 1
  - Temperatur, Konzentrationen, ...

„Rechengitter“

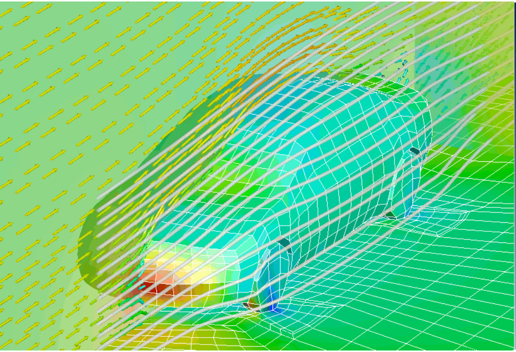


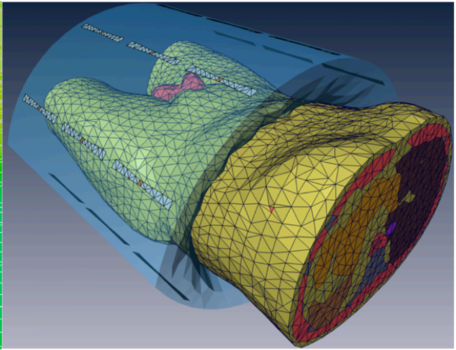


- Unbekannte werden an jedem Gitterpunkt approximiert
- Unbekannte bei Navier-Stokes:
  - Geschwindigkeit: 3
  - Druck: 1
  - Temperatur, Konzentrationen, ...

$\rightsquigarrow$ Riesige (nichtlineare) Gleichungssysteme

„Rechengitter“





- Unbekannte werden an jedem Gitterpunkt approximiert
- Unbekannte bei Navier-Stokes:
  - Geschwindigkeit: 3
  - Druck: 1
  - Temperatur, Konzentrationen, ...

$\rightsquigarrow$ Riesige (nichtlineare) Gleichungssysteme

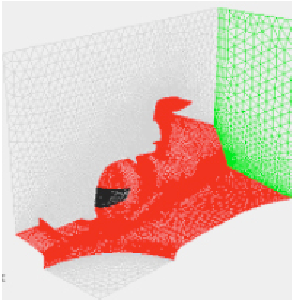
- Zeitabhängigkeit $\rightsquigarrow$ Iteration über viele Zeitschritte

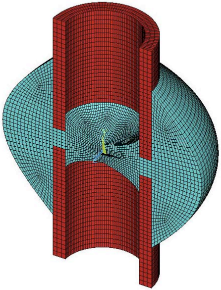
Numerische Simulation

- Ziel: Bestimme eine Approximation der/einer Lösung

Numerische Simulation

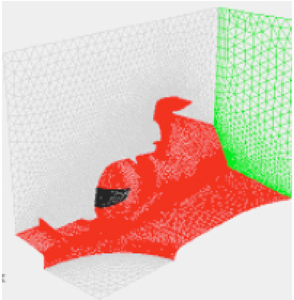
- Ziel: Bestimme eine Approximation der/einer Lösung
- Dazu: Bilde ein Rechengitter

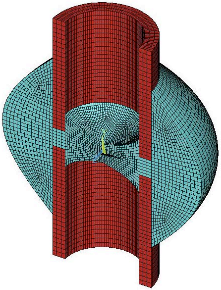




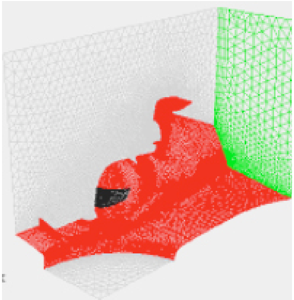
Numerische Simulation

- Ziel: Bestimme eine Approximation der/einer Lösung
- Dazu: Bilde ein Rechengitter
- Anzahl der Gitterpunkte
  $\sim$ Dimension des Problems

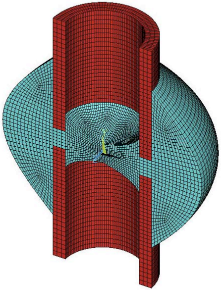




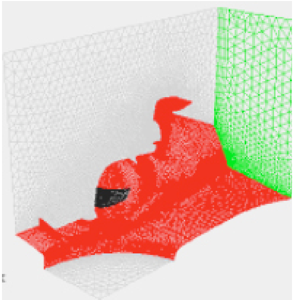
Numerische Simulation



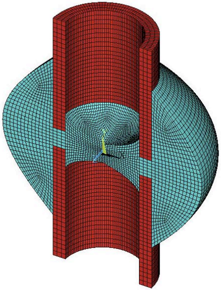
- Ziel: Bestimme eine Approximation der/einer Lösung
- Dazu: Bilde ein Rechengitter
- Anzahl der Gitterpunkte
  $\sim$ Dimension des Problems
- Löse dieses Problem näherungsweise auf dem Computer (Numerische Mathematik)



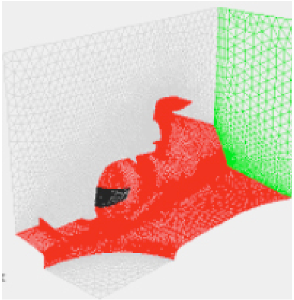
Numerische Simulation



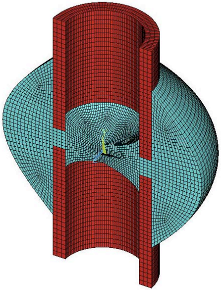
- Ziel: Bestimme eine Approximation der/einer Lösung
- Dazu: Bilde ein Rechengitter
- Anzahl der Gitterpunkte
  $\sim$ Dimension des Problems
- Löse dieses Problem näherungsweise auf dem Computer (Numerische Mathematik)
- verwende dazu (numerische) Algorithmen



Numerische Simulation

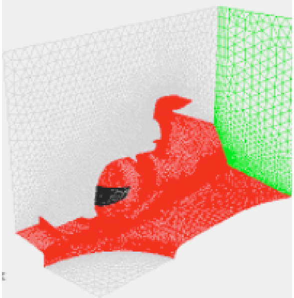


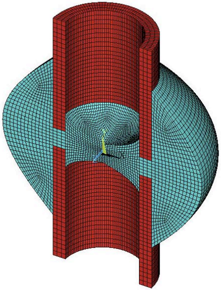
- Ziel: Bestimme eine Approximation der/einer Lösung
- Dazu: Bilde ein Rechengitter
- Anzahl der Gitterpunkte
  $\sim$ Dimension des Problems
- Löse dieses Problem näherungsweise auf dem Computer (Numerische Mathematik)
- verwende dazu (numerische) Algorithmen
- erhalte Näherung u_h von u ($h \sim$ Maschenweite)



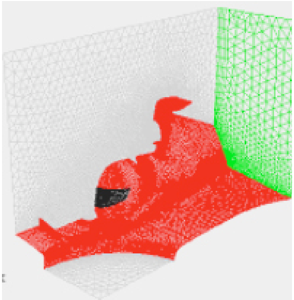
Numerische Simulation

- Ziel: Bestimme eine Approximation der/einer Lösung
- Dazu: Bilde ein Rechengitter
- Anzahl der Gitterpunkte
  $\sim$ Dimension des Problems
- Löse dieses Problem näherungsweise auf dem Computer (Numerische Mathematik)
- verwende dazu (numerische) Algorithmen
- erhalte Näherung u_h von u ($h \sim$ Maschenweite)
- mathematische Fragestellungen:

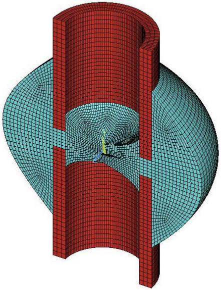




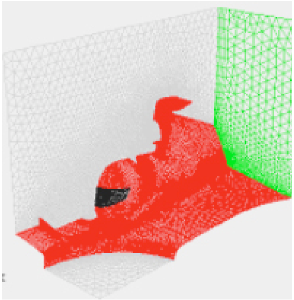
Numerische Simulation



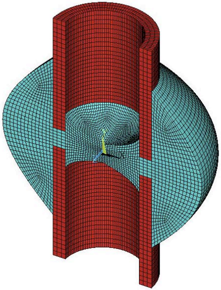
- Ziel: Bestimme eine Approximation der/einer Lösung
- Dazu: Bilde ein Rechengitter
- Anzahl der Gitterpunkte
  $\sim$ Dimension des Problems
- Löse dieses Problem näherungsweise auf dem Computer (Numerische Mathematik)
- verwende dazu (numerische) Algorithmen
- erhalte Näherung u_h von u ($h \sim$ Maschenweite)
- mathematische Fragestellungen:
  - Zuverlässigkeit / Konvergenz?



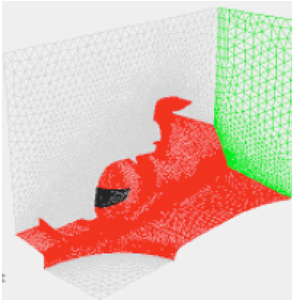
Numerische Simulation



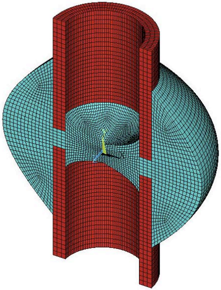
- Ziel: Bestimme eine Approximation der/einer Lösung
- Dazu: Bilde ein Rechengitter
- Anzahl der Gitterpunkte
  $\sim$ Dimension des Problems
- Löse dieses Problem näherungsweise auf dem Computer (Numerische Mathematik)
- verwende dazu (numerische) Algorithmen
- erhalte Näherung u_h von u ($h \sim$ Maschenweite)
- mathematische Fragestellungen:
  - Zuverlässigkeit / Konvergenz?
  - Genauigkeit: $|u - u_h| \leq$ Toleranz?



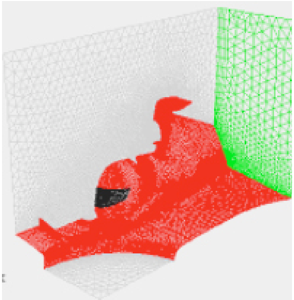
Numerische Simulation



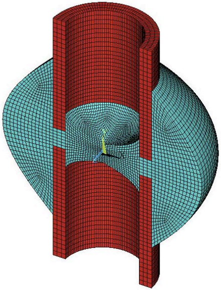
- Ziel: Bestimme eine Approximation der/einer Lösung
- Dazu: Bilde ein Rechengitter
- Anzahl der Gitterpunkte
  $\sim$ Dimension des Problems
- Löse dieses Problem näherungsweise auf dem Computer (Numerische Mathematik)
- verwende dazu (numerische) Algorithmen
- erhalte Näherung u_h von u ($h \sim$ Maschenweite)
- mathematische Fragestellungen:
  - Zuverlässigkeit / Konvergenz?
  - Genauigkeit: $|u - u_h| \leq$ Toleranz?
  - Ist dies die „richtige“ Lösung? (Experimente)



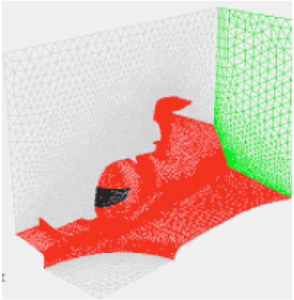
Numerische Simulation



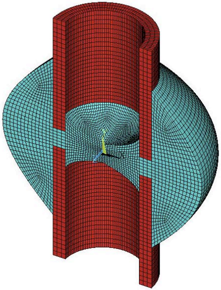
- Ziel: Bestimme eine Approximation der/einer Lösung
- Dazu: Bilde ein Rechengitter
- Anzahl der Gitterpunkte
  $\sim$ Dimension des Problems
- Löse dieses Problem näherungsweise auf dem Computer (Numerische Mathematik)
- verwende dazu (numerische) Algorithmen
- erhalte Näherung u_h von u ($h \sim$ Maschenweite)
- mathematische Fragestellungen:
  - Zuverlässigkeit / Konvergenz?
  - Genauigkeit: $|u - u_h| \leq$ Toleranz?
  - Ist dies die „richtige" Lösung? (Experimente)
  - Aufwand / Effizienz?



Numerische Simulation



- Ziel: Bestimme eine Approximation der/einer Lösung
- Dazu: Bilde ein Rechengitter
- Anzahl der Gitterpunkte
  $\sim$ Dimension des Problems
- Löse dieses Problem näherungsweise auf dem Computer (Numerische Mathematik)
- verwende dazu (numerische) Algorithmen
- erhalte Näherung u_h von u ($h \sim$ Maschenweite)
- mathematische Fragestellungen:
  - Zuverlässigkeit / Konvergenz?
  - Genauigkeit: $|u - u_h| \leq$ Toleranz?
  - Ist dies die „richtige“ Lösung? (Experimente)
  - Aufwand / Effizienz?
  - Robustheit?



Vergleich mit der Realität


Vergleich mit der Realität

- Modellfehler (Gleichung beschreibt die Realität nicht)
  $\rightsquigarrow$ Validierung

Vergleich mit der Realität

- Modellfehler (Gleichung beschreibt die Realität nicht)
  $\rightsquigarrow$ Validierung
- Lösungsfehler (Gleichung nicht korrekt approximiert)
  $\rightsquigarrow$ Verifikation

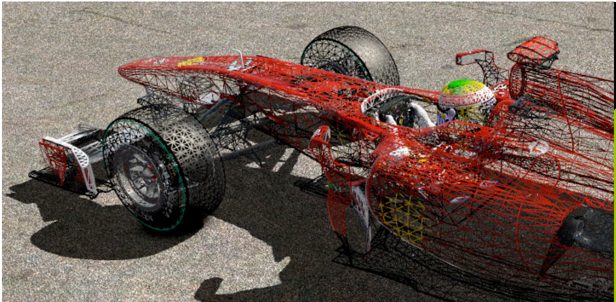
Und wenn's schief geht?

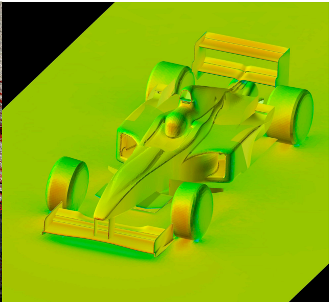




- „Ein Mathematiker muss die Blaupause unterschreiben können."
- Quantifizierung von Unsicherheiten.
- Modellfehler validieren

Der “optimale” Ferrari



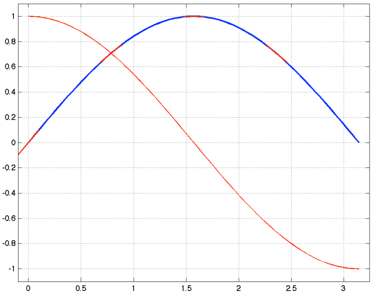


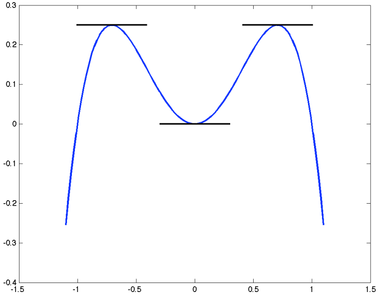
Optimierung wie in der Schule

Aufgabe: Suche das Optimum x_{opt} von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Kurvendiskussion:

- $f'(x_{\mathrm{opt}}) = 0$ (Tangente waagerecht, keine Steigung)
- $f''(x_{\mathrm{opt}}) < 0$ (negative Krümmung, konkav)





Und bei Ferrari?

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird z.B. f : Parameter $\mapsto$ Windwiderstand

Und bei Ferrari?

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird z.B. f : Parameter $\mapsto$ Windwiderstand
- ABER:
  Parameter $\mapsto$ Geschwindigkeit, Druck $\mapsto$ Windwiderstand
  Navier-Stokes-Gleichungen

Und bei Ferrari?

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird z.B. f : Parameter $\mapsto$ Windwiderstand
- ABER:
  Parameter $\mapsto$ Geschwindigkeit, Druck $\mapsto$ Windwiderstand
  Navier-Stokes-Gleichungen
- Eine einzige Berechnung dauert Tage!

Und bei Ferrari?

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird z.B. f : Parameter $\mapsto$ Windwiderstand
- ABER:
  Parameter $\mapsto$ Geschwindigkeit, Druck $\mapsto$ Windwiderstand
  Navier-Stokes-Gleichungen
- Eine einzige Berechnung dauert Tage!
- Ableitungen können nicht berechnet werden
  (keine Lösungs-Formel für die Navier-Stokes-Gleichungen vorhanden)

Und bei Ferrari?

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird z.B. f : Parameter $\mapsto$ Windwiderstand
- ABER:
  Parameter $\mapsto$ Geschwindigkeit, Druck $\mapsto$ Windwiderstand
  Navier-Stokes-Gleichungen
- Eine einzige Berechnung dauert Tage!
- Ableitungen können nicht berechnet werden
  (keine Lösungs-Formel für die Navier-Stokes-Gleichungen vorhanden)

$\rightsquigarrow$ Optimierung geht wieder nur numerisch!

Numerische Optimierung/Minimeirung

(Konjugierte) Gradienten–Verfahren

- Ziel: Optmiere/Minimiere $f(x)$

Numerische Optimierung/Minimeirung

(Konjugierte) Gradienten–Verfahren

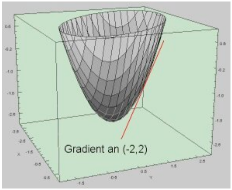
- Ziel: Optmiere/Minimiere $f(x)$
- Iterationsverfahren mit Startwert $x^{(0)}$; Für $k = 0, 1, 2, 3, \ldots,$ do

Numerische Optimierung/Minimeirung

(Konjugierte) Gradienten–Verfahren

- Ziel: Optmiere/Minimiere $f(x)$
- Iterationsverfahren mit Startwert $x^{(0)}$; Für $k = 0, 1, 2, 3, \dots,$ do

1. Gegeben $x^{(k)}$. Bestimme Abstiegsrichtung $d^{(k)}$



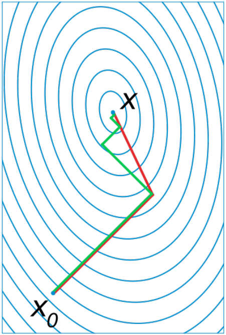
Numerische Optimierung/Minimeirung

(Konjugierte) Gradienten–Verfahren

- Ziel: Optmiere/Minimiere $f(x)$
- Iterationsverfahren mit Startwert $x^{(0)}$; Für $k = 0, 1, 2, 3, \dots,$ do

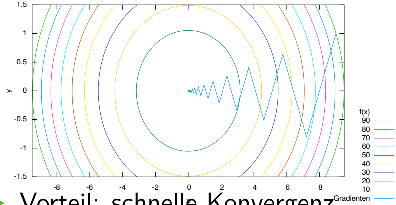
1. Gegeben $x^{(k)}$. Bestimme Abstiegsrichtung $d^{(k)}$
2. Liniensuche: maximiere bzgl. $\mu \in \mathbb{R}$

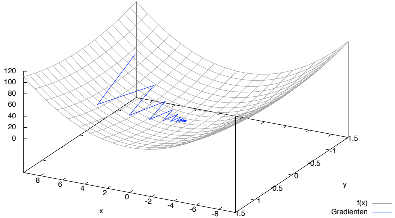
$$f(x^{(k)} + \mu d^{(k)})$$



Numerische Optimierung/Minimeirung

(Konjugierte) Gradienten–Verfahren

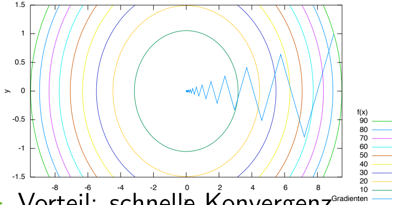


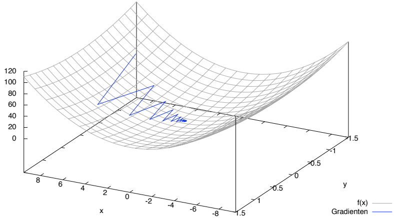


- Vorteil: schnelle Konvergenz (wenig Schritte, k klein)

Numerische Optimierung/Minimeirung

(Konjugierte) Gradienten–Verfahren

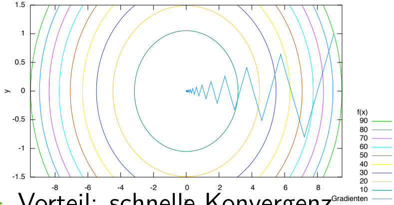


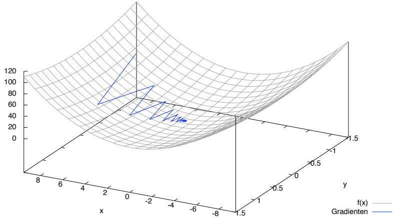


- Vorteil: schnelle Konvergenz (wenig Schritte, k klein)
- Nachteil: man braucht die Ableitungen für die Richtungen

Numerische Optimierung/Minimeirung

(Konjugierte) Gradienten–Verfahren

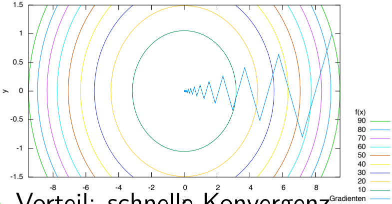


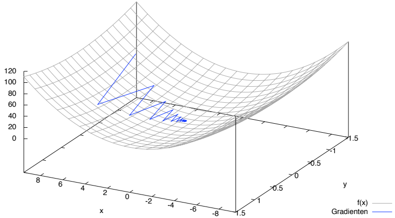


- Vorteil: schnelle Konvergenz (wenig Schritte, k klein)
- Nachteil: man braucht die Ableitungen für die Richtungen
- Aufwand:
  - 1.: Ableitung: #Parameter $\cdot$ 4 Tage
  - 2.: Liniensuche (wie weit geht man?): mind. 4 Tage
  - mal #(Iterationen) (also $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$)

Numerische Optimierung/Minimeirung

(Konjugierte) Gradienten–Verfahren

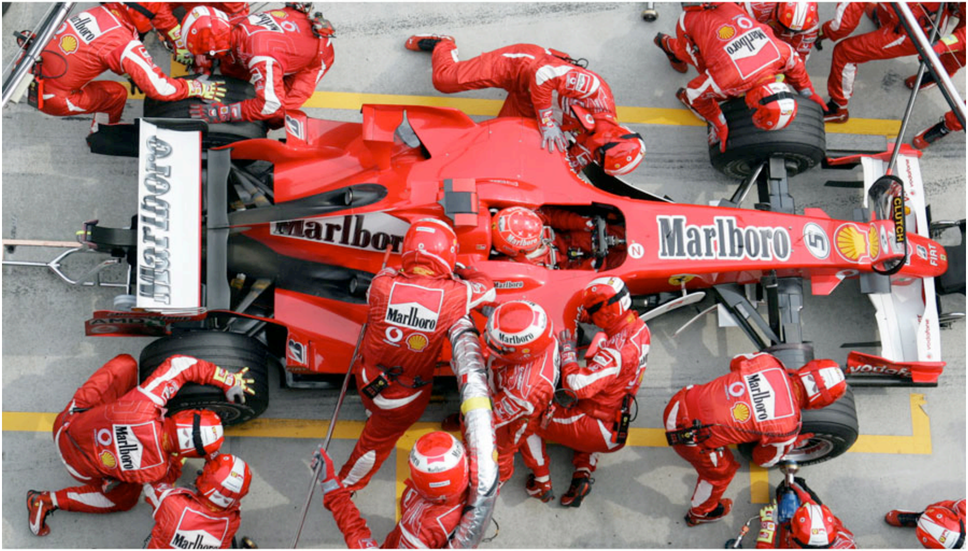




- Vorteil: schnelle Konvergenz (wenig Schritte, k klein)
- Nachteil: man braucht die Ableitungen für die Richtungen
- Aufwand:
  - 1.: Ableitung: #Parameter $\cdot$ 4 Tage
  - 2.: Liniensuche (wie weit geht man?): mind. 4 Tage
  - mal #(Iterationen) (also $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$)

$\rightsquigarrow$ Optimierung dauert Tage/Wochen/Monate...

Optimierung während des Rennens?



Reduzierte Basis-Methoden (RBM): So funktioniert die RBM

1. Konstruiere die mathematische Theorie (Fehlerschätzer)

Reduzierte Basis-Methoden (RBM): So funktioniert die RBM

1. Konstruiere die mathematische Theorie (Fehlerschätzer)
2. Bestimme auf Hochleistungsrechner (offline) die Reduzierte Basis ($\rightsquigarrow$ Lösung von Navier-Stokes, RBM-Berechnung)

Reduzierte Basis-Methoden (RBM): So funktioniert die RBM

1. Konstruiere die mathematische Theorie (Fehlerschätzer)
2. Bestimme auf Hochleistungsrechner (offline) die Reduzierte Basis ($\rightsquigarrow$ Lösung von Navier-Stokes, RBM-Berechnung)
3. Programmiere reduziertes System auf Laptop (in der Box)

Reduzierte Basis-Methoden (RBM): So funktioniert die RBM

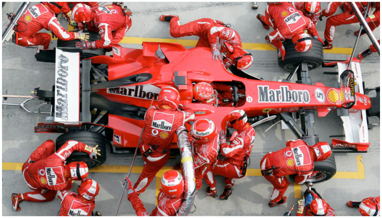
1. Konstruiere die mathematische Theorie (Fehlerschätzer)
2. Bestimme auf Hochleistungsrechner (offline) die Reduzierte Basis ($\rightsquigarrow$ Lösung von Navier-Stokes, RBM-Berechnung)
3. Programmiere reduziertes System auf Laptop (in der Box)
4. Für neue Parameter löse das RBM-System auf Laptop

Reduzierte Basis-Methoden (RBM): So funktioniert die RBM

1. Konstruiere die mathematische Theorie (Fehlerschätzer)
2. Bestimme auf Hochleistungsrechner (offline) die Reduzierte Basis ($\rightsquigarrow$ Lösung von Navier-Stokes, RBM-Berechnung)
3. Programmiere reduziertes System auf Laptop (in der Box)
4. Für neue Parameter löse das RBM-System auf Laptop
5. Fehlerschätzer gibt rigorose Fehlerkontrolle

Reduzierte Basis-Methoden (RBM): So funktioniert die RBM

1. Konstruiere die mathematische Theorie (Fehlerschätzer)
2. Bestimme auf Hochleistungsrechner (offline) die Reduzierte Basis ($\rightsquigarrow$ Lösung von Navier-Stokes, RBM-Berechnung)
3. Programmiere reduziertes System auf Laptop (in der Box)
4. Für neue Parameter löse das RBM-System auf Laptop
5. Fehlerschätzer gibt rigorose Fehlerkontrolle
6. Optimierung während des Rennens, Justierung beim Boxenstopp



Anwendungen der RBM

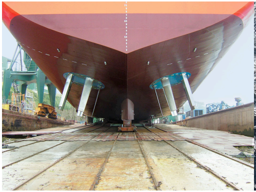
Die Reduzierte Basis Methode (RBM) ist sinnvoll, wenn ...

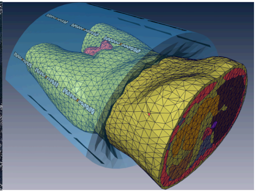
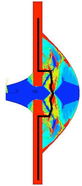
- man sich eine online-offline-Zerlegung „leisten“ kann

Anwendungen der RBM

Die Reduzierte Basis Methode (RBM) ist sinnvoll, wenn ...

- man sich eine online-offline-Zerlegung „leisten“ kann
- man eine Gleichung (o.ä.) oft für viele Parameter lösen muss („multi-query“)

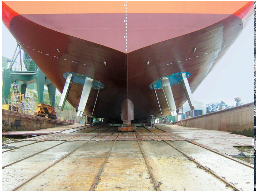


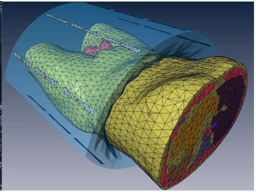
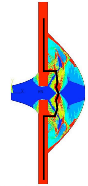





Anwendungen der RBM

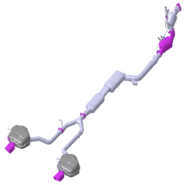
Die Reduzierte Basis Methode (RBM) ist sinnvoll, wenn ...

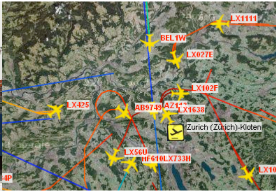
- man sich eine online-offline-Zerlegung „leisten“ kann
- man eine Gleichung (o.ä.) oft für viele Parameter lösen muss („multi-query“)




- man in begrenzte Zeit (real-time) und/oder Rechenkapazität hat





Richtiges Werkzeug

Zusammenfassung 1/3

- moderne, effiziente numerische Simulationen erlauben erst eine Optimierung komplexer Systeme (auch in Echtzeit)

Zusammenfassung 1/3

- moderne, effiziente numerische Simulationen erlauben erst eine Optimierung komplexer Systeme (auch in Echtzeit)
- numerische Optimierung kann zu erheblichen Verbesserungen führen

Zusammenfassung 1/3

- moderne, effiziente numerische Simulationen erlauben erst eine Optimierung komplexer Systeme (auch in Echtzeit)
- numerische Optimierung kann zu erheblichen Verbesserungen führen
- (Ein) Ziel der Mathematik: mathematische Fehlerkontrolle $\sim$ Experiment

Zusammenfassung 1/3

- moderne, effiziente numerische Simulationen erlauben erst eine Optimierung komplexer Systeme (auch in Echtzeit)
- numerische Optimierung kann zu erheblichen Verbesserungen führen
- (Ein) Ziel der Mathematik: mathematische Fehlerkontrolle $\sim$ Experiment
- Reduzierte Basis-Methoden können hierfür eingesetzt werden

Zusammenfassung 1/3

- moderne, effiziente numerische Simulationen erlauben erst eine Optimierung komplexer Systeme (auch in Echtzeit)
- numerische Optimierung kann zu erheblichen Verbesserungen führen
- (Ein) Ziel der Mathematik: mathematische Fehlerkontrolle $\sim$ Experiment
- Reduzierte Basis-Methoden können hierfür eingesetzt werden
- Wissenschaftliches Rechnen:

uzwr
ulmer zentrum für
wissenschaftliches rechnen

6) Reglement für das Seminar zur Ausbildung von Studirenden im wissenschaftlichen Rechnen an der Königlichen Universität zu Berlin.

§. 1.

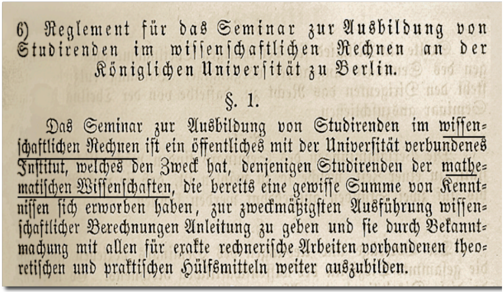
Das Seminar zur Ausbildung von Studirenden im wissenschaftlichen Rechnen ist ein öffentliches mit der Universität verbundenes Institut, welches den Zweck hat, denjenigen Studirenden der mathematischen Wissenschaften, die bereits eine gewisse Summe von Kenntnissen sich erworben haben, zur zweckmäßigsten Ausführung wissenschaftlicher Berechnungen Anleitung zu geben und sie durch Bekanntmachung mit allen für exakte rechnerische Arbeiten vorhandenen theoretischen und praktischen Hülfsmitteln weiter auszubilden.

(Berlin, 1879)

Zusammenfassung 1/3

- moderne, effiziente numerische Simulationen erlauben erst eine Optimierung komplexer Systeme (auch in Echtzeit)
- numerische Optimierung kann zu erheblichen Verbesserungen führen
- (Ein) Ziel der Mathematik: mathematische Fehlerkontrolle $\sim$ Experiment
- Reduzierte Basis-Methoden können hierfür eingesetzt werden
- Wissenschaftliches Rechnen:
  - Modellierung

uzwr
ulmer zentrum für
wissenschaftliches rechnen


6) Reglement für das Seminar zur Ausbildung von Studirenden im wissenschaftlichen Rechnen an der Königlichen Universität zu Berlin.

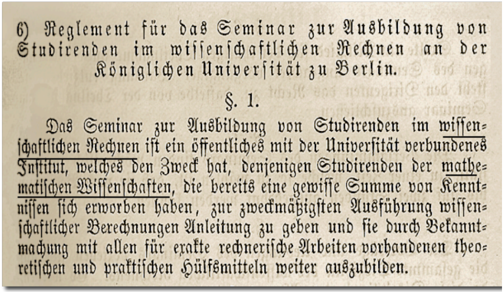
§. 1.

Das Seminar zur Ausbildung von Studirenden im wissenschaftlichen Rechnen ist ein öffentliches mit der Universität verbundenes Institut, welches den Zweck hat, denjenigen Studirenden der mathematischen Wissenschaften, die bereits eine gewisse Summe von Kenntnissen sich erworben haben, zur zweckmäßigsten Ausführung wissenschaftlicher Berechnungen Anleitung zu geben und sie durch Bekanntmachung mit allen für exakte rechnerische Arbeiten vorhandenen theoretischen und praktischen Hülfsmitteln weiter auszubilden.

(Berlin, 1879)

Zusammenfassung 1/3

- moderne, effiziente numerische Simulationen erlauben erst eine Optimierung komplexer Systeme (auch in Echtzeit)
- numerische Optimierung kann zu erheblichen Verbesserungen führen
- (Ein) Ziel der Mathematik: mathematische Fehlerkontrolle $\sim$ Experiment
- Reduzierte Basis-Methoden können hierfür eingesetzt werden
- Wissenschaftliches Rechnen:
  - Modellierung
  - Analyse



6) Reglement für das Seminar zur Ausbildung von Studirenden im wissenschaftlichen Rechnen an der Königlichen Universität zu Berlin.

§. 1.

Das Seminar zur Ausbildung von Studirenden im wissenschaftlichen Rechnen ist ein öffentliches mit der Universität verbundenes Institut, welches den Zweck hat, denjenigen Studirenden der mathematischen Wissenschaften, die bereits eine gewisse Summe von Kenntnissen sich erworben haben, zur zweckmäßigsten Ausführung wissenschaftlicher Berechnungen Anleitung zu geben und sie durch Bekanntmachung mit allen für exakte rechnerische Arbeiten vorhandenen theoretischen und praktischen Hülfsmitteln weiter auszubilden.

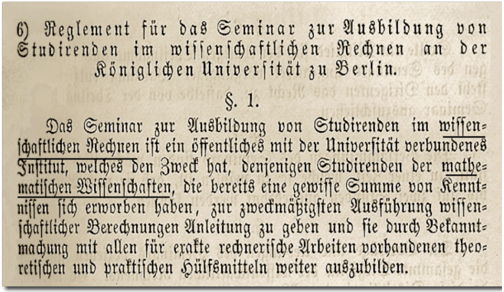
(Berlin, 1879)

uzwr

ulmer zentrum für wissenschaftliches rechnen

Zusammenfassung 1/3

- moderne, effiziente numerische Simulationen erlauben erst eine Optimierung komplexer Systeme (auch in Echtzeit)
- numerische Optimierung kann zu erheblichen Verbesserungen führen
- (Ein) Ziel der Mathematik: mathematische Fehlerkontrolle $\sim$ Experiment
- Reduzierte Basis-Methoden können hierfür eingesetzt werden
- Wissenschaftliches Rechnen:
  - Modellierung
  - Analyse
  - Simulation und Optimierung



6) Reglement für das Seminar zur Ausbildung von Studirenden im wissenschaftlichen Rechnen an der Königlichen Universität zu Berlin.

§. 1.

Das Seminar zur Ausbildung von Studirenden im wissenschaftlichen Rechnen ist ein öffentliches mit der Universität verbundenes Institut, welches den Zweck hat, denjenigen Studirenden der mathematischen Wissenschaften, die bereits eine gewisse Summe von Kenntnissen sich erworben haben, zur zweckmäßigsten Ausführung wissenschaftlicher Berechnungen Anleitung zu geben und sie durch Bekanntmachung mit allen für exakte rechnerische Arbeiten vorhandenen theoretischen und praktischen Hülfsmitteln weiter auszubilden.

(Berlin, 1879)

uzwr
ulmer zentrum für
wissenschaftliches rechnen

Zusammenfassung 1/3

- moderne, effiziente numerische Simulationen erlauben erst eine Optimierung komplexer Systeme (auch in Echtzeit)
- numerische Optimierung kann zu erheblichen Verbesserungen führen
- (Ein) Ziel der Mathematik: mathematische Fehlerkontrolle $\sim$ Experiment
- Reduzierte Basis-Methoden können hierfür eingesetzt werden
- Wissenschaftliches Rechnen:
  - Modellierung
  - Analyse
  - Simulation und Optimierung
  - Visualisierung

uzwr
ulmer zentrum für
wissenschaftliches rechnen

6) Reglement für das Seminar zur Ausbildung von Studirenden im wissenschaftlichen Rechnen an der Königlichen Universität zu Berlin.

§. 1.

Das Seminar zur Ausbildung von Studirenden im wissenschaftlichen Rechnen ist ein öffentliches mit der Universität verbundenes Institut, welches den Zweck hat, denjenigen Studirenden der mathematischen Wissenschaften, die bereits eine gewisse Summe von Kenntnissen sich erworben haben, zur zweckmäßigsten Ausführung wissenschaftlicher Berechnungen Anleitung zu geben und sie durch Bekanntmachung mit allen für exakte rechnerische Arbeiten vorhandenen theoretischen und praktischen Hülfsmitteln weiter auszubilden.

(Berlin, 1879)

Zusammenfassung 1/3

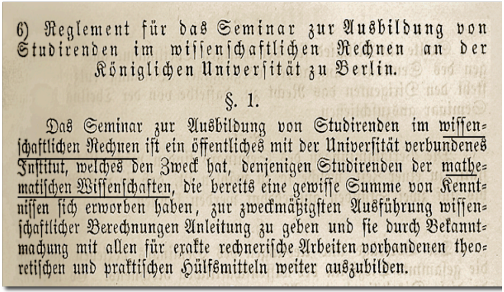
- moderne, effiziente numerische Simulationen erlauben erst eine Optimierung komplexer Systeme (auch in Echtzeit)
- numerische Optimierung kann zu erheblichen Verbesserungen führen
- (Ein) Ziel der Mathematik: mathematische Fehlerkontrolle $\sim$ Experiment
- Reduzierte Basis-Methoden können hierfür eingesetzt werden
- Wissenschaftliches Rechnen:
  - Modellierung
  - Analyse
  - Simulation und Optimierung
  - Visualisierung

und zwar interdisziplinär!

Das alles ist CSE!

uzwr

ulmer zentrum für wissenschaftliches rechnen


6) Reglement für das Seminar zur Ausbildung von Studirenden im wissenschaftlichen Rechnen an der Königlichen Universität zu Berlin.

§. 1.

Das Seminar zur Ausbildung von Studirenden im wissenschaftlichen Rechnen ist ein öffentliches mit der Universität verbundenes Institut, welches den Zweck hat, denjenigen Studirenden der mathematischen Wissenschaften, die bereits eine gewisse Summe von Kenntnissen sich erworben haben, zur zweckmäßigsten Ausführung wissenschaftlicher Berechnungen Anleitung zu geben und sie durch Bekanntmachung mit allen für exakte rechnerische Arbeiten vorhandenen theoretischen und praktischen Hülfsmitteln weiter auszubilden.

(Berlin, 1879)

Zusammenfassung 2/3

Simulation geht nicht auf Knopfdruck!

Zusammenfassung 2/3

Simulation geht nicht auf Knopfdruck!

Der Computer rechnet

der Mensch denkt!

Zusammenfassung 2/3

Simulation geht nicht auf Knopfdruck!

Der Computer rechnet

damit, dass

der Mensch denkt!

Zusammenfassung 2/3

Simulation geht nicht auf Knopfdruck!

Der Computer rechnet

damit, dass

der Mensch denkt!

Auch dazu braucht man CSE!

Zusammenfassung 3/3

Leonardo da Vinci (1452-1519):

Chi biasima la somma certezza delle matematiche si pasce di confusione.

http://www.uzwr.de

Zusammenfassung 3/3

Leonardo da Vinci (1452-1519):

Chi biasima la somma certezza delle matematiche si pasce di confusione.

Wer die Sicherheit der Mathematik verachtet,
der stürzt sich in das Chaos der Gedanken.

http://www.uzwr.de

Zusammenfassung 3/3

Leonardo da Vinci (1452-1519):

Chi biasima la somma certezza delle matematiche si pasce di confusione.

Wer die Sicherheit der Mathematik verachtet,
der stürzt sich in das Chaos der Gedanken.

Variante:

Wer die Sicherheit der Mathematik verachtet,
der stürzt sich in das Chaos der Computer.

http://www.uzwr.de