Dr. G. Baur
René Pröpper

SoSe 2010
18. Mai 2010

Mathematische Grundlagen der Ökonomie II - Übungen

Blatt 5

Abgabe: 26. Mai 2010 vor der Übung bis spätestens 14.10 Uhr

1. $(2+3+3+2$ Punkte$)$

Gegeben seien folgende Vektoren:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

a) Sind $\vec{v}_4$, $\vec{v}_5$ linear unabhängig? Und $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$?

b) Zeigen Sie, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ sind linear abhängig und $\vec{v}_3$ läßt sich als Linearkombination von $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ darstellen, d.h. $\vec{v}_3 = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2$; bestimmen Sie α_1 und α_2. Folgern Sie daraus $\mathcal{LH}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \mathcal{LH}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

c) Zeigen Sie $\vec{v}_4, \vec{v}_5 \in \mathcal{LH}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$, d.h. $\vec{v}_4 = \beta_1\vec{v}_1 + \beta_2\vec{v}_2$ und $\vec{v}_5 = \gamma_1\vec{v}_1 + \gamma_2\vec{v}_2$; bestimmen Sie β_1, β_2 und γ_1, γ_2. Folgern Sie $\mathcal{LH}(\vec{v}_4, \vec{v}_5) \subseteq \mathcal{LH}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

d) Zeigen Sie $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathcal{LH}(\vec{v}_4, \vec{v}_5)$, d.h. $\vec{v}_1 = \beta_4\vec{v}_4 + \beta_5\vec{v}_5$ und $\vec{v}_2 = \gamma_4\vec{v}_4 + \gamma_5\vec{v}_5$; bestimmen Sie β_4, β_5 und γ_4, γ_5. Folgern Sie $\mathcal{LH}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \subseteq \mathcal{LH}(\vec{v}_4, \vec{v}_5)$ und damit $\mathcal{LH}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \mathcal{LH}(\vec{v}_4, \vec{v}_5)$.

2. (6 Punkte)

Die fünf Zahlen 82547, 72265, 22698, 41225 und 95739 sind durch 97 teilbar. Zeigen Sie, dass auch die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 5 & 4 & 7 \\ 7 & 2 & 2 & 6 & 5 \\ 2 & 2 & 6 & 9 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 9 & 5 & 7 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

durch 97 teilbar ist.

3. $(2+2$ Punkte$)$

Es seien folgende quadratische Formen gegeben:

a) $x^2 - 4xy - 4y^2$

b) $3x^2 - 4xy + 6xz + 2y^2 - 4xz + 6z^2$.

Finden Sie jeweils die zugehörige symmetrische Matrix.

4. $(2+3+4$ Punkte$)$

Untersuchen Sie folgende Matrizen auf Definitheit:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -5 \\ -2 & -5 & 14 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

5. (4 Punkte)

Es sei A eine beliebige quadratische Matrix und $\vec{x}^T A\vec{x}$ die zugehörige quadratische Form. Zeigen Sie, dass es eine eindeutige symmetrische Matrix B gibt, so dass die zu B und A gehörigen quadratischen Formen gleich sind.