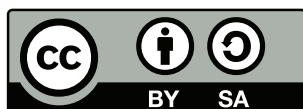


Vorlesungsskript

PHYS2000.0 Optik Bachelor Physik Bachelor Wirtschaftsphysik Lehramt Physik

Othmar Marti
Institut für Experimentelle Physik
Universität Ulm

veröffentlicht unter



[Lizenzinformationen](#)

21. März 2015

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
1.1	Lizenzinformationen	5
1.2	Literaturhinweise	6
2	Geometrische Optik	7
2.1	Lichtgeschwindigkeit	9
2.2	Licht in der geometrischen Optik	12
2.3	Bilderzeugung durch Brechung	14
2.3.1	Dünne Linsen	16
2.3.2	Bildkonstruktion bei Linsen	19
2.3.3	Dicke Linsen	20
2.3.4	Mehrere Linsen	21
2.4	Ebene Spiegel	22
2.5	Bilderzeugung mit sphärischen Spiegel	23
2.5.1	Konvexspiegel	25
2.5.2	Bildkonstruktion beim Hohlspiegel	26
2.6	Abbildungsfehler	29
3	Optische Instrumente	33
3.1	Das Auge	33
3.2	Die Lupe	34
3.3	Die Kamera	35
3.4	Das Mikroskop	36
3.5	Das Teleskop oder Fernrohr	38
3.6	Das Prisma: ein optisches Instrument mit Dispersion	40
4	Physikalische Begründung der geometrischen Optik	49
4.1	Das Fresnel-Huygenssche Prinzip	49
4.2	Reflexion	52
4.3	Brechung	54
4.3.1	Totalreflexion	56
4.4	Das Fermatsche Prinzip	57
4.4.1	Reflexion	57
4.4.2	Brechung	58
4.4.3	Das Fermatsche Prinzip und die Interferenz	59
4.5	Polarisation	61
4.5.1	Polarisation durch Absorption (Dichroismus)	62
4.5.2	Polarisation durch Streuung	64
4.5.3	Polarisation durch Reflexion	65

4.5.4	Polarisation durch Doppelbrechung	66
4.5.5	Beschreibung der Polarisation durch Jones-Vektoren und Jones-Matrizen	70
4.5.6	Beispiele zur Polarisation	73
4.6	Die Fresnelschen Formeln	75
4.6.1	Evaneszente Wellen	85
5	Interferenz und Beugung	87
5.1	Phasendifferenz und Kohärenz	88
5.1.1	Stehende Wellen	89
5.1.2	Das Michelson-Interferometer	90
5.1.3	Das Fabry-Perot-Interferometer	91
5.2	Wellen in 2 und mehr Dimensionen	97
5.2.1	Ebene Wellen	98
5.2.2	Kugelwellen	99
5.3	Interferenzmuster an einem Doppelspalt	101
5.4	Vektoraddition von harmonischen Wellen	103
5.5	Interferenzmuster bei drei und mehr äquidistanten Quellen	104
5.6	Interferenz an dünnen Schichten	106
5.7	Beugungsmuster an einem Einzelspalt	109
5.7.1	Berechnung der Intensitätsverteilung	110
5.8	Interferenz- und Beugungsmuster beim Doppelspalt	113
5.9	Fraunhofersche und Fresnelsche Beugung	114
5.9.1	Fresnelsche Näherung	115
5.9.2	Fraunhofer-Beugung	118
5.9.3	Vergleich	118
5.10	Beugungsgitter und Spektrographen	120
5.10.1	Blaze-Gitter	121
5.10.2	Hologramme	122
5.11	Beugung und Auflösung	126
5.11.1	Impulsantwort und Faltungssatz	127
6	Resonatoren und ihre Lichtmoden	133
6.1	Matrixformulierung der Lichtpropagation	133
6.1.1	Stabilität	137
6.2	Resonatoren mit sphärischen Spiegeln	138
6.3	Gausssche Strahlen	139
6.3.1	Divergenz und Strahldurchmesser	143
6.3.2	Wirkung optischer Elemente auf Gaussche Strahlen	144
6.3.3	Moden	146
A	Symbole	157
	Abbildungsverzeichnis	165
	Tabellenverzeichnis	169
	Index	173

1. Einleitung

1.1. Lizenzinformationen

Diese Skript wird unter der Creative Commons Lizenz CC-BY-SA 3.0 veröffentlicht. Dies heisst,

- Sie dürfen das Werk ganz oder in Teilen in allen denkbaren Formaten weiterverwenden, vervielfältigen und weiterverbreiten
- das Werk oder Teile davon neu zusammenstellen, verändern und darauf weitere Werke aufbauen,

sofern Sie

- den Namen der Verfassers dieses Werkes sowie deren Institution, die Universität Ulm, nennen und angemessene Rechte- und Urheberrechtsangaben machen, einen Link zur Lizenz beifügen und angeben, ob Sie Änderungen vorgenommen haben. Dabei darf nicht der Eindruck entstehen, die Verfasser oder die Universität Ulm würden Sie oder Ihre Nutzung unterstützen.
- Wenn Sie Dieses Werk oder Teile davon neu zusammenstellen, verändern und darauf weitere Werke aufbauen, dürfen Sie ihre Beiträge nur unter der gleichen Lizenz wie dieses Werk wie dieses Original verbreiten.

Sie dürfen insbesondere keine weiteren Einschränkungen einsetzen und auch keine technischen Verfahren wie z.B. DRM verwenden, die anderen Nutzern etwas untersagt oder daran hindert, das abgeleitete Werk nach dieser Lizenz zu nutzen. Eine detaillierte Erklärung finden Sie unter

<http://www.uni-ulm.de/en/einrichtungen/e-learning/blog/article/was-sind-eigentlich-cc-lizenzen.html>

oder unter

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>

oder unter

<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de/>



Die CC-Icons und -Buttons wurden unter der Lizenz CC BY von <http://creativecommons.org/about/downloads> veröffentlicht.

Der Aufbau dieser Vorlesung richtet sich nach dem studienbegleitenden Praktikum zur Optik. Wir beginnen deshalb mit der geometrischen Optik, ohne eine Ableitung der Gesetze aus der Wellennatur des Lichtes. Die Gesetze der geometrischen Optik werden im folgenden Kapitel aus der Wellennatur des Lichtes abgeleitet. Dies führt zu der Diskussion von Interferenz und Beugung.

Als Ergänzung zur Vorlesung möchte ich auf eine wunderbare Website zum Aufarbeiten Ihres Wissens ist [Hyperphysics](#) von R. Nave hinweisen. Ergänzend gibt es vom gleichen Autor auch [Hypermath](#). Das Programm [Winlens](#) ist ein wunderbares Spielzeug, um auch grössere optische Aufbauten schnell und interaktiv zu berechnen. Die Firma Melles Griot hat auf ihren Webseiten ein längeres [Tutorium](#).

1.2. Literaturhinweise

Die Vorlesung orientiert sich an den Werken von Tipler[[TM04](#)], Physik, und Gerthsen/Vogel[[Mes0](#)]. Physik. Zum Aufarbeiten des gelernten Stoffes (nicht als Einsteigerliteratur) kann auch Kneubühls[[Kne78](#)] "Repetitorium der Physik" empfohlen werden. Speziell für die Optik sind die Bücher von Demtröder [[Dem08](#)], Hecht[[Hec](#)] und Perez[[Pér96](#)]. Mathematische Probleme und Formeln sind sehr schön im Bronstein[[BSMM00](#)] zusammengefasst.

2. Geometrische Optik



(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 231]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1023]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1059]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 7])

Licht besteht, je nach Experiment, das durchgeführt wird, aus Wellen oder aus Teilchen. Der Teilchencharakter ist zuerst durch *Isaac Newton* propagiert worden. Newton konnte damit die Brechungsgesetze erklären, musste dazu aber annehmen, dass das Licht sich im optisch dichteren Medium schneller als im Vakuum ausbreitet. Die Experimente von *Thomas Young* zur Wellennatur des Lichtes sowie die Theorie von *Augustin Fresnel* zeigten, dass alle klassischen optischen Experimente durch die Wellentheorie erklärt werden können. Insbesondere konnte die Brechung erklärt werden durch die geringere Lichtgeschwindigkeit im optisch dichteren Medium. Die Entdeckung des *photoelektrischen Effektes* und ihre Erklärung durch *Albert Einstein* führte zur quantenmechanischen Theorie des Lichtes, in der Licht sowohl Wellen- wie auch Teilchencharakter hat.

Licht ist aus der modernen Forschung nicht mehr wegzudenken, wie die folgenden Beispiele zeigen:

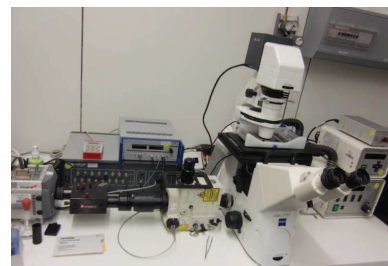
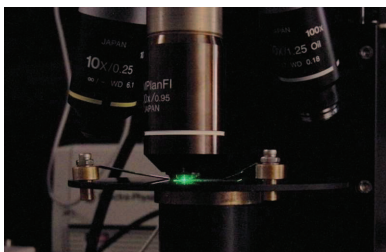


Abbildung 2.1.: Links sehen sie ein konfokales Ramanmikroskop aus dem [Institut für Experimentelle Physik](#), rechts ein Fluoreszenz-Laserscanningmikroskop, wie es im [Institut für Biophysik](#) steht.

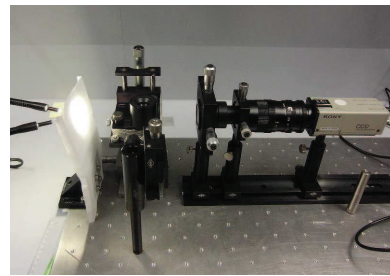
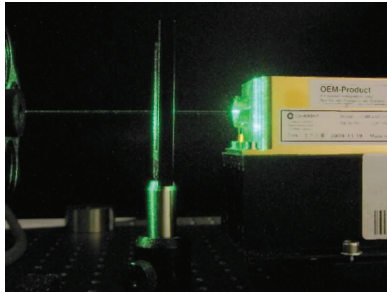


Abbildung 2.2.: Links sehen sie einen frequenzverdoppelten NdYAG-Laser aus dem [Institut für Experimentelle Physik](#), rechts ein Kontaktwinkelmessgerät aus dem [Institut für Experimentelle Physik](#).

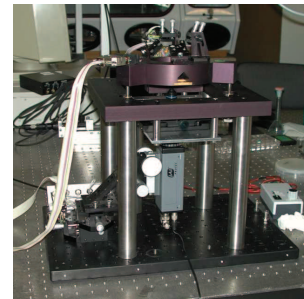
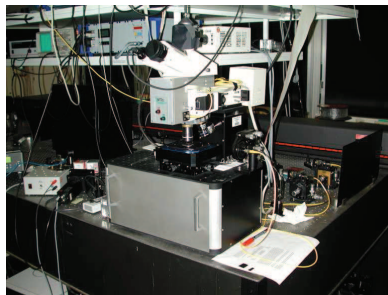


Abbildung 2.3.: Links sehen Sie einen Prototypen des [AlphaSNOM](#), rechts das von [Herrn Maghelli](#) gebaute Rasterkraftmikroskop, beide aus dem [Institut für Experimentelle Physik](#)

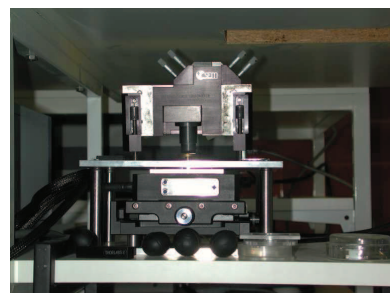


Abbildung 2.4.: Links sehen Sie einige Laser aus dem Optiklabor dem [Institut für Experimentelle Physik](#), rechts ein Rasterkraftmikroskop aus dem [Institut für Experimentelle Physik](#)

Die geometrische Optik, das Thema dieses Kapitels, befasst sich mit den Experimenten, bei denen die Wellennatur des Lichtes vernachlässigt werden kann, bei

denen man also von *Lichtstrahlen* reden kann.

2.1. Lichtgeschwindigkeit



(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 71]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1025])

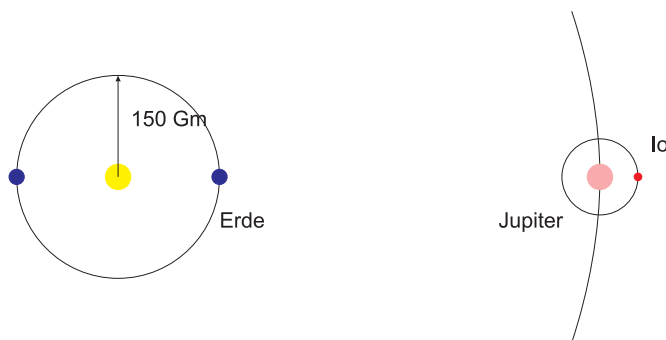


Abbildung 2.5.: Bestimmung der *Lichtgeschwindigkeit* mit Hilfe der Periodendauer der Umlaufzeit des Jupitermondes Io.

Astronomische Beobachtungen waren schon immer sehr genau. *Ole Rømer* beobachtete 1675 dass der Eintritt des Jupitermondes Io in den Kernschatten sich abhängig von den Sternkonstellationen verschob. Die Periode der Umlaufzeit beträgt 42.5 Stunden und nimmt zu, wenn die Erde sich vom Jupiter weg bewegt und ab, wenn sie sich auf den Jupiter zu bewegt. Der maximale Zeitunterschied ist $2 * 150 \times 10^9 m / 3 \times 10^8 m/s = 1000s$. Zwischen zwei Eintritten in den Kernschatten ist der Zeitunterschied zum mittleren Zeitunterschied $150 \times 10^9 m / (365.24 * 24h) * 42.5h / 3 \times 10^8 m/s = 2.42s$. Ole Rømer brauchte also eine Uhr, die in 24h weniger als eine Sekunde Fehler hatte. Ole Rømer mass eine Lichtgeschwindigkeit von ungefähr $2 \times 10^8 m/s$. Daraus kann geschlossen werden, dass seine Zeitmessung eine relative Genauigkeit von 3×10^{-7} hatte, besser als manche Armbanduhr heute.

Eine gewaltige Verbesserung der Genauigkeit erzielte *Bradley* mit seiner Beobachtung der Aberration des Lichtes. Analog zum Regen, der, wenn man steht von oben kommt und der wenn man geht schräg von vorne fällt, ändert das Licht seine Einfallrichtung. Aus der Winkeländerung kann auf die Lichtgeschwindigkeit geschlossen werden, wenn man die Eigengeschwindigkeit kennt.

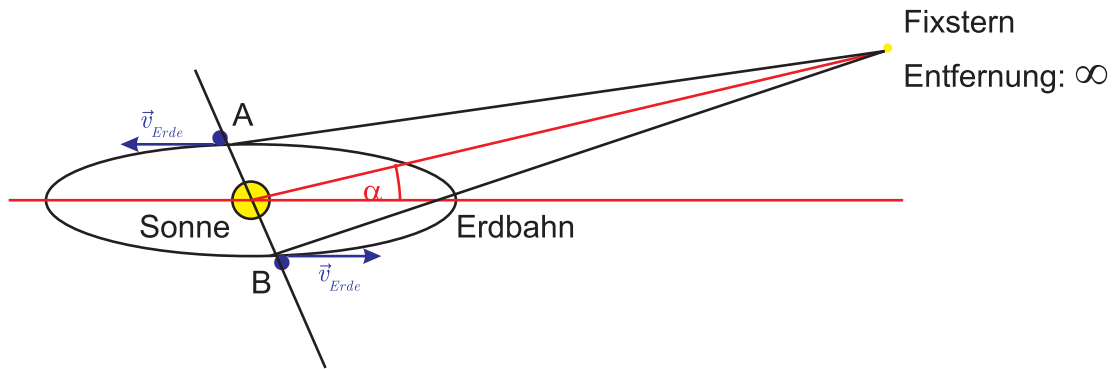


Abbildung 2.6.: Bradley beobachtete die Position eines Fixsterns (möglichst unendlich weit weg) zu verschiedenen Zeiten.

In der Abbildung sind zwei extreme Positionen aufgezeichnet, da wo die Erde mit maximaler Geschwindigkeit auf den Stern sich hinbewegt und da, wo sie sich mit maximale Geschwindigkeit entfernt. Die Bahngeschwindigkeit der Erde ist etwa $v_{Erde} = 3 \cdot 10^4 m/s$. Alternativ könnte man die Position des Sterns auch im Abstand von 12 Stunden ausmessen. dabei müsste die Umfangsgeschwindigkeit, die in Ulm etwa $v_{Umfang, Ulm} = 327 m/s$ und damit etwa 100 mal kleiner ist, verwendet werden.

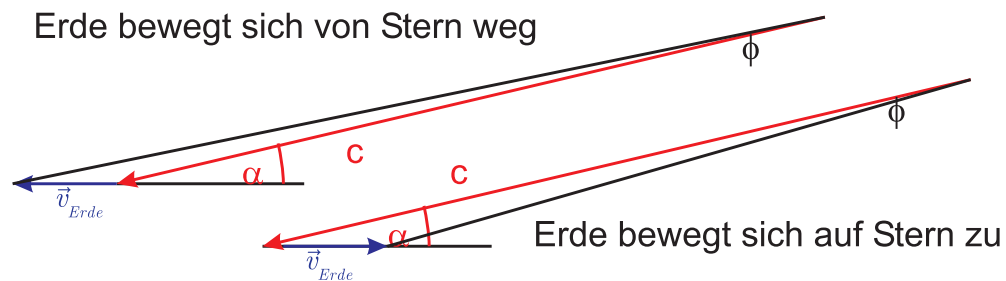


Abbildung 2.7.: Dreiecke zur Berechnung der Lichtgeschwindigkeit nach Bradley

Zur Berechnung verwenden wir den Sinussatz:

$$\frac{v_{Erde}}{\sin \phi} = \frac{c}{\sin(\pi - \alpha - \phi)} \quad (2.1.1)$$

Praktischerweise ergeben sich für beide Fälle, sowohl auf die Erde zu wie von der Erde weg die gleiche Gleichung. Diese Beziehung formen wir um

$$\begin{aligned}
c &= \frac{\sin(\pi - \alpha - \phi)}{\sin \phi} v_{Erde} & (2.1.2) \\
&= \frac{\sin(\alpha + \phi)}{\sin \phi} v_{Erde} \\
&= \frac{\sin \alpha \cos \phi + \cos \alpha \sin \phi}{\sin \phi} v_{Erde}
\end{aligned}$$

Für kleine Winkel $\phi \ll \pi$ bekommen wir

$$c = \frac{\sin \alpha}{\tan \phi} v_{Erde} \quad (2.1.3)$$

Wie gross ist nun der zu messende Winkel ϕ ? Wir betrachten einen Stern, der etwa $\pi/4$ über der *Ekliptik* (der *Bahnebene der Erde*) liegt. Mit $v_{Erde} = 30 \text{ km/s}$ und $c = 300000 \text{ km/s}$ und $\alpha = \pi/4$ erhalten wir

$$\phi \approx \tan \phi = \sin \alpha \frac{v_{Erde}}{c} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0.0001 \approx 7 \cdot 10^{-5} = 0.24' \quad (2.1.4)$$

Der gemessene Winkelunterschied zwischen den Punkten A und B ist somit

$$\Delta\Phi = 2\phi \approx 0.48' \quad (2.1.5)$$

Wenn wir nur im Zeitabstand von einem Tag messen, ist der Winkel $\Delta\Phi = 0,29''$.

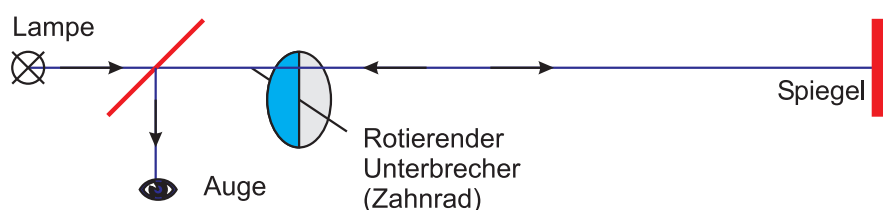
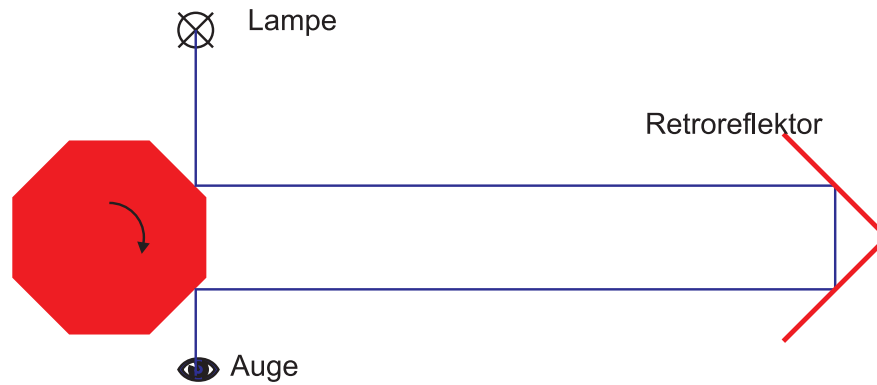
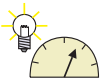


Abbildung 2.8.: Lichtgeschwindigkeitsmessung nach *Armand Fizeau* (1849)

Fizeau verwendete einen Weg von 8.63 km . Bei bestimmten Geschwindigkeiten (welchen?) wurde der Weg des Lichtes blockiert, bei anderen durchgelassen. Nehmen wir an, dass das Zahnrad mit 100 Umdrehungen pro Sekunde rotiere. Das Licht wird blockiert, wenn das Zahnrad sich um einen halben Zahn weiter dreht in der Laufzeit des Lichtes. Die Laufzeit ist $t = 8630 \text{ m} / 3 \times 10^8 \text{ m/s} = 2,877 \times 10^{-5} \text{ s}$. Die Umdrehungszeit des Rades ist 0.01 s . Also hat das Rad $n = 0.01 / (2 \times 2,877 \times 10^{-5}) = 174$ Zähne, machbar!.

Abbildung 2.9.: Messung der Lichtgeschwindigkeit mit der *Drehspiegelmethode***Versuch zur Vorlesung:**

Messung der Lichtgeschwindigkeit mit der Drehspiegelmethode (Versuchskarte O-030)

Eine verbesserte Methode ist die *Messung der Lichtgeschwindigkeit nach Leon Foucault*. Er verwendete einen Drehspiegel. Seine Genauigkeit war so gross, dass er auch den Unterschied der Lichtgeschwindigkeit in stehendem und fließendem Wasser messen konnte.

Heute wird die *Lichtgeschwindigkeit mit moderner Elektronik* gemessen.

Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum beträgt $299\,792\,458 \frac{m}{s}$. Sie ist eine Definitionsgrösse.

2.2. Licht in der geometrischen Optik

(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 41]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 7])

**Versuch zur Vorlesung:**

Brechung und Reflexion (Versuchskarte O-068)

In der geometrischen Optik hat das Licht die folgenden Eigenschaften:

- Licht bewegt sich in homogenen Medien geradlinig aus.
- Licht wird durch *Lichtstrahlen* dargestellt (Im Wellenbild entspricht dies ebenen Wellen).
- Licht hat nur eine Farbe, das heisst es ist *monochromatisch*.

- Wenn die Farbe von Licht keinen Einfluss auf die Ausbreitung des Lichtes hat, verwendet man auch weisses Licht.
- Licht wird an Oberflächen reflektiert. Dabei gilt das Reflexionsgesetz (Siehe Abschnitt 4.2).

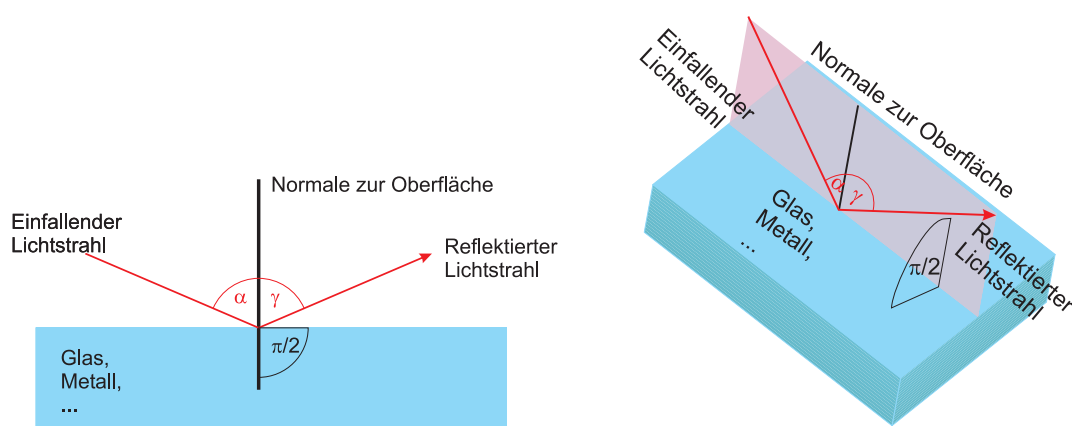


Abbildung 2.10.: *Reflexionsgesetz*: links die Querschnittsansicht und rechts eine dreidimensionale Skizze

Der einfallende Strahl und der reflektierte Strahl liegen in einer Ebene, in der auch die Oberflächennormale zur reflektierenden Oberfläche liegt. Für die Winkel zwischen den Lichtstrahlen und der Oberflächennormale gilt

$$\alpha = \gamma \quad (2.2.1)$$

- Tritt ein Lichtstrahl von einem transparenten Medium mit der Lichtgeschwindigkeit c_1 in ein zweites transparentes Medium mit der Lichtgeschwindigkeit c_2 ein, so wird er gebrochen.

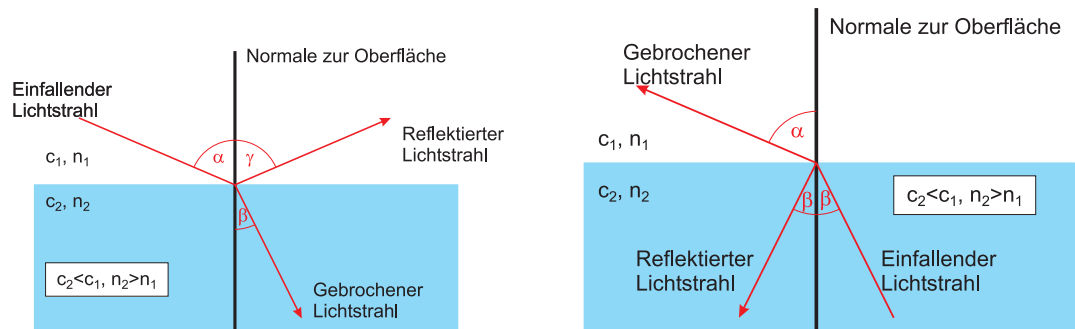


Abbildung 2.11.: Strahlengang bei *Brechung*. Links ist der Strahlengang gezeigt, wenn Licht aus dem optisch dünneren Medium mit c_1 in das optisch dichtere Medium mit $c_2 < c_1$ eintritt. Die rechte Zeichnung zeigt den umgekehrten Verlauf der Strahlung, aus dem optisch dichteren Medium in das optisch dünnere Medium.

Das *Brechungsgesetz* oder das *Gesetz von Snellius* lautet

$$\frac{\sin \alpha}{c_1} = \frac{\sin \beta}{c_2} \quad (2.2.2)$$

Mit dem *Brechungsindex*, der definiert ist als das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum c und der Lichtgeschwindigkeit im Medium i , c_i

$$n_i = \frac{c}{c_i} \quad (2.2.3)$$

lautet das Brechungsgesetz

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \quad (2.2.4)$$

Mit diesen beiden Gesetzen können die Phänomene der geometrischen Optik berechnet werden.



Versuch zur Vorlesung:
Applet [Lichtbrechung](#) ([Versuchskarte](#) -)



2.3. Bilderzeugung durch Brechung

(Siehe Hecht, Optik [[Hec](#), pp. 238]) (Siehe Tipler, Physik [[TM04](#), pp. 1068]) (Siehe Pérez, Optik [[Pér96](#), pp. 41])



Versuch zur Vorlesung:

Optische Scheibe (Versuchskarte O-046)

Winlens Software

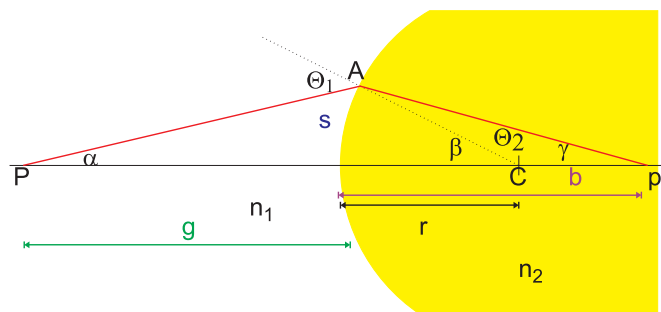


Abbildung 2.12.: Brechung von Licht an einer gekrümmten Glasoberfläche

Gleich wie mit Spiegeln können Abbildungen mit Linsen durchgeführt werden. Für kleine Winkel gilt $\sin \Theta \approx \Theta$. Wir erhalten

$$n_1 \Theta_1 = n_2 \Theta_2 \quad (2.3.1)$$

β ist der Aussenwinkel von $P'CA$. Also ist

$$\beta = \Theta_2 + \gamma = \frac{n_1}{n_2} \Theta_1 + \gamma \quad (2.3.2)$$

Θ_1 ist der Aussenwinkel von PAC .

$$\Theta_1 = \alpha + \beta \quad (2.3.3)$$

Nach Elimination von Θ_1 folgt

$$n_1 \alpha + n_2 \gamma = (n_2 - n_1) \beta \quad (2.3.4)$$

Für kleine Winkel (*paraxiale Näherung*) gilt, dass $\alpha \approx s/g$, $\beta = s/r$ und $\gamma = s/b$ ist, wobei g die *Gegenstandsweite*, b die *Bildweite* und r der Krümmungsradius der *Oberfläche* ist. Eingesetzt:

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad (2.3.5)$$

Hier sind, im Gegensatz zum sphärischen Spiegel, die reellen Bilder hinter der Grenzfläche.

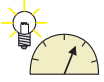
Nach dem Strahlensatz ist $n_1 \frac{\text{Gegenstandsgrösse}}{g} = n_2 \frac{\text{Bildgrösse}}{b}$. Der Abbildungsstab ist also

$$V = \frac{\text{Bildgrösse}}{\text{Gegenstandsgrösse}} = -\frac{n_1 b}{n_2 g} \quad (2.3.6)$$



2.3.1. Dünne Linsen

(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 242]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 106]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1071])



Versuch zur Vorlesung:

Optische Scheibe (Versuchskarte O-046)

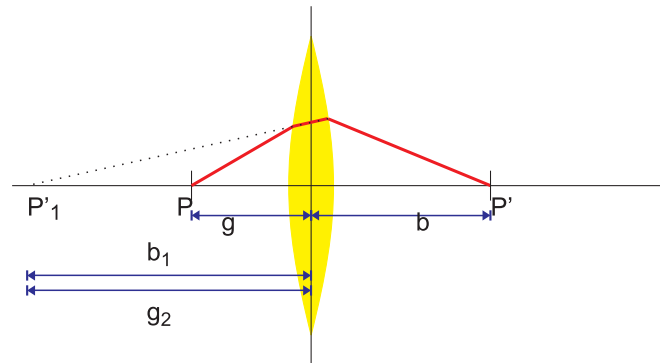


Abbildung 2.13.: *Dünne Linse*. Brechung tritt an beiden Oberflächen auf.

Wir betrachten eine *dünne Linse*, das heißt, dass wir die Dicke des Glases vernachlässigen. Die Linsenoberflächen sollen die Krümmungsradien r_1 und r_2 (rechts) haben. Die *Linse* mit dem *Brechungsindex* n ist in Luft (*Brechungsindex* = 1). Ein Gegenstand befindet sich im Abstand g links vor der ersten Ebene, und damit auch im Abstand g vor der Mittelebene. Die *Bildweite* b_1 aufgrund der ersten *Oberfläche* nach wird Gleichung (2.3.5) mit

$$\frac{1}{g} + \frac{n}{b_1} = \frac{n-1}{r_1} \quad (2.3.7)$$

Das Bild ist virtuell, da das Licht auch noch an der zweiten Grenzfläche gebrochen wird. In unserer Abbildung ist die *Bildweite* b_1 negativ. Diese *Bildweite* b_2 ist für die zweite *Oberfläche* die Gegenstandsweite $g_2 = -b_1$. Die Abbildungsgleichung dort lautet

$$\frac{n}{g_2} + \frac{1}{b} = \frac{1-n}{r_2} \quad (2.3.8)$$

Eingesetzt und addiert ergibt sich

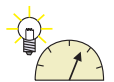
$$\begin{aligned} \frac{1}{g} + \frac{1}{b} &= \frac{n-1}{r_1} + \frac{1-n}{r_2} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \\ \frac{1}{f} &= (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

wobei wir $g = \infty$ gesetzt haben. Dann ist $b = f$ die *Brennweite*.

Abbildungsgleichung

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (2.3.10)$$

- Strahlen, die die *Linse* auf der optischen Achse schneiden, werden nicht abgelenkt.
- Achsenparallele Strahlen werden im *Brennpunkt* fokussiert
- Strahlen aus dem *Brennpunkt* werden zu achsenparallelen Strahlen.



Versuch zur Vorlesung:

Brennweitenbestimmung nach Bessel (Versuchskarte O-055)

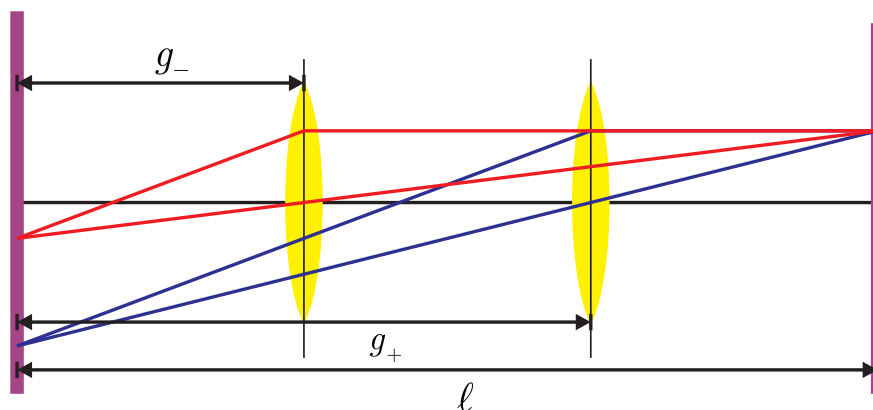


Abbildung 2.14.: Die zwei Positionen einer Linse, bei denen eine scharfe Abbildung erreicht wird.

Zur Berechnung verwenden wir die Abbildungsgleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \quad (2.3.11)$$

mit der Nebenbedingung

$$g + b = \ell \quad (2.3.12)$$

Aus den beiden Gleichungen erhalten wir

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{\ell - g} = \frac{\ell}{g(\ell - g)} \quad (2.3.13)$$

Damit bekommen wir

$$\begin{aligned} g(\ell - g) &= \ell f \\ g^2 - \ell g + \ell f &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Die Lösung der quadratischen Gleichung ist:

$$\begin{aligned} g_{\pm} &= \frac{\ell \pm \sqrt{\ell^2 - 4\ell f}}{2} \\ &= \frac{\ell}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{f}{\ell}} \right) \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

Die Linse wird auf die zwei Positionen eingestellt, in denen eine scharfe Abbildung geschieht. Der Abstand dieser zwei Positionen ist:

$$\Delta g = g_+ - g_- = \ell \sqrt{1 - 4\frac{f}{\ell}} \quad (2.3.16)$$

Dann ist

$$\left(\frac{\Delta g}{\ell} \right)^2 = 1 - 4\frac{f}{\ell} \quad (2.3.17)$$

Somit ist die Brennweite

$$f = \frac{\ell}{4} \left(1 - \frac{\Delta g^2}{\ell^2} \right) \quad (2.3.18)$$

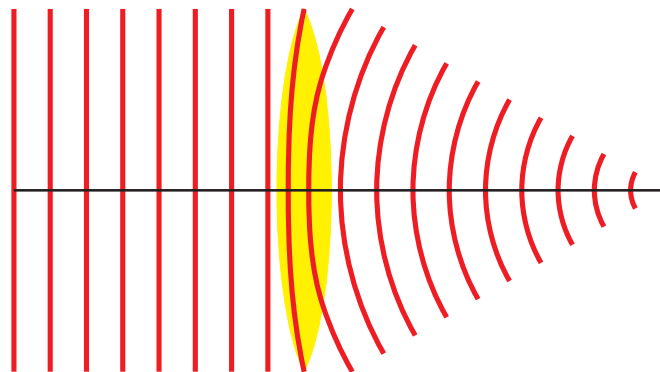


Abbildung 2.15.: Wellenfronten beim Durchgang durch eine *Linse*

Licht breitet sich in einem optisch dichteren Medium langsamer aus als im dünneren. Bei einer Konvexlinse treffen die achsennahen Lichtstrahlen eher auf das Glas als die achsenferneren. Diese überholen deshalb die achsennahen Lichtstrahlen. Im Wellenbild bedeutet dies, dass ebene Wellen zu konzentrisch auf einen Punkt zulaufenden Wellen werden: die *Linse* fokussiert.

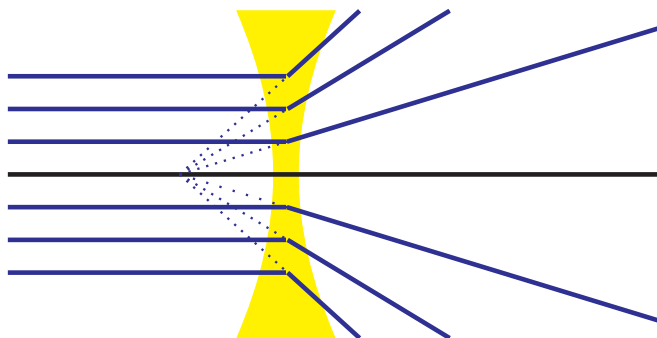


Abbildung 2.16.: Zerstreuungslinse

Bei einer *Zerstreuungslinse* sind die Oberflächen konkav gekrümmt. Die Krümmungsradien sind negativ. Eine Konkavlinse (Zerstreuungslinse) wirkt wie ein Konvexspiegel.



2.3.2. Bildkonstruktion bei Linsen

(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 250]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 107]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1075])

Bei einer *Linse* gelten die folgenden Regeln zur Konstruktion der Bilder:

- Achsparallele Strahlen werden in den Fokus fokussiert. Bei Konkavlinen scheinen die aus achsparallelen Strahlen hervorgegangenen Strahlen aus dem *Brennpunkt* zu kommen.
- Strahlen, die Die *Linse* auf ihrer optischen Achse treffen, werden nicht abgelenkt.

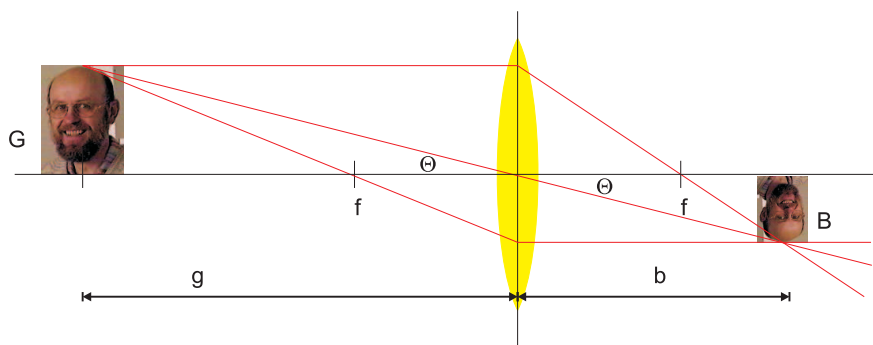


Abbildung 2.17.: Abbildung bei einer Konvexlinse

Die Konstruktion der Abbildung bei einer Konvexlinse ist in der obigen Abbildung gezeigt. g ist die Gegenstandsweite, b die *Bildweite* und f die *Brennweite*. Die

Vergrößerung ist:

$$V = \frac{B}{G} = -\frac{b}{g} \quad (2.3.19)$$

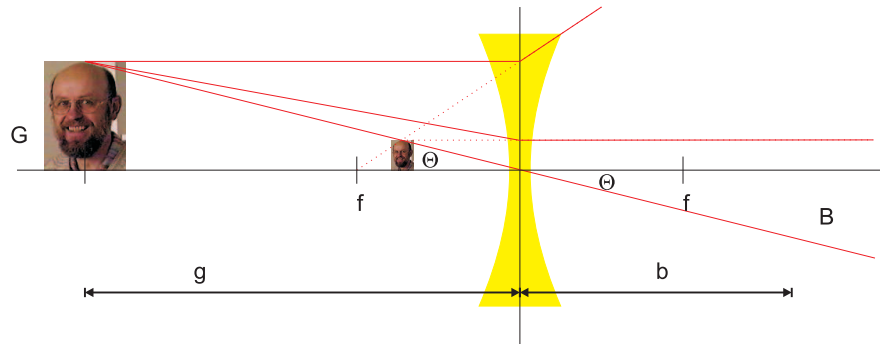


Abbildung 2.18.: Abbildung bei einer Konkavlinse

Die Bildkonstruktion bei einer *Konkavlinse* verläuft analog zu der bei einer *Konvexlinse*.



2.3.3. Dicke Linsen

(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 363]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 100]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1077])

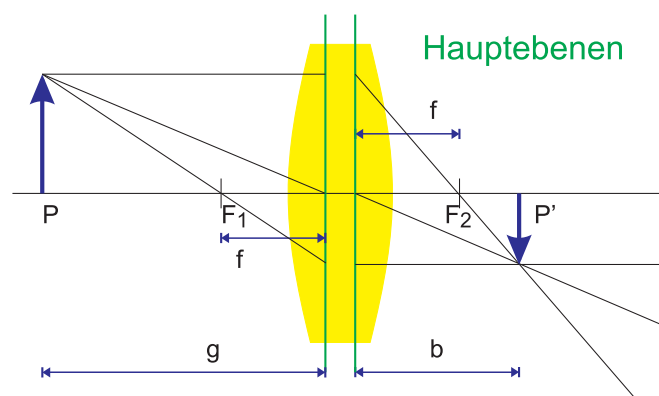


Abbildung 2.19.: Dicke Linse

Eine dicke *Linse* wird wie eine dünne berechnet, mit der Ausnahme, dass alle Messungen von Distanzen von den jeweiligen Hauptebenen aus gemacht werden müssen.

2.3.4. Mehrere Linsen

(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 258]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 116]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1078])

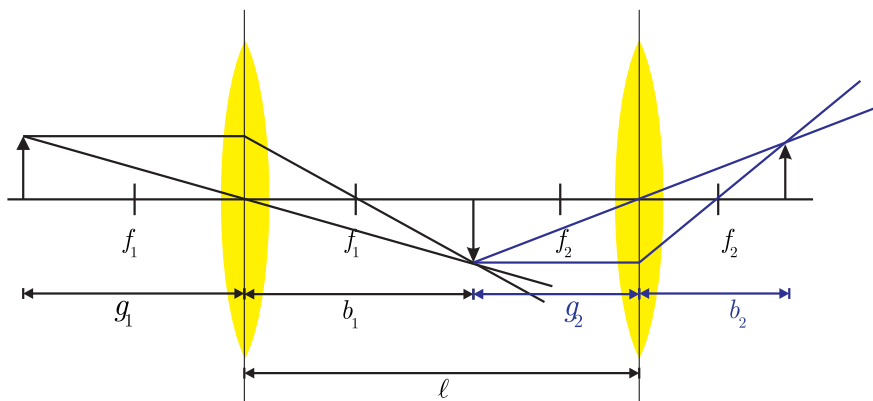


Abbildung 2.20.: Geometrie eines Doppellinsensystems

Bei mehreren Linsen berechnet man aus der Brennweite f_1 und der Gegenstandsweite g_1 die *Bildweite* b_1 . Die Lage des Bildes gibt die Gegenstandsweite g_2 der zweiten *Linse*. Mit der *Brennweite* der zweiten *Linse* f_2 kann das Bild b_2 berechnet werden. Zur Berechnung benötigen wir noch den Abstand der Linsen ℓ . Die Gegenstandsweite der zweiten Linse ist $g_2 = \ell - b_1$. Aus der Abbildungsgleichung erhalten wir

$$b_1 = \frac{f_1 g_1}{g_1 - f_1} \quad (2.3.20)$$

$$b_2 = \frac{f_2 g_2}{g_2 - f_2}$$

Durch die Kombination der beiden Gleichungen erhalten wir

$$b_2 = \frac{f_2(\ell - b_1)}{\ell - b_1 - f_2} \quad (2.3.21)$$

$$= \frac{f_2(\ell - \frac{f_1 g_1}{g_1 - f_1})}{\ell - \frac{f_1 g_1}{g_1 - f_1} - f_2}$$

$$= \frac{f_2(\ell(g_1 - f_1) - f_1 g_1)}{(\ell - f_2)(g_1 - f_1) - f_1 g_1}$$

Diese Gleichung hat eine Divergenz bei $(\ell - f_2)(g_1 - f_1) - f_1 g_1 = 0$, das heisst bei der Gegenstandsweite

$$g_1 = \frac{(\ell - f_2)f_1}{\ell - f_1 - f_2} \quad (2.3.22)$$

Beispiel

- Die *Linse* 1 sei bei der Position $x_1 = 0\text{cm}$, die *Linse* 2 bei der Position $x_2 = 20\text{cm}$.
- Die Brennweiten seien $f_1 = 5\text{cm}$ und $f_2 = 10\text{cm}$
- Der Gegenstand sei bei $x_g = -6\text{cm}$
- Dann ist $g_1 = 6\text{cm}$. Daraus folgt mit der Linsengleichung $b_1 = 1/(1/f_1 - 1/g_1) = 30\text{cm}$
- Es ist also $x_b = 30\text{cm}$
- Da $x_2 = 20\text{cm}$ ist $g_2 = -10\text{cm}$
- Damit erhalten wir $b_2 = 1/(1/f_2 - 1/g_2) = 1/(1/10\text{cm} - 1/(-10\text{cm})) = 5\text{cm}$

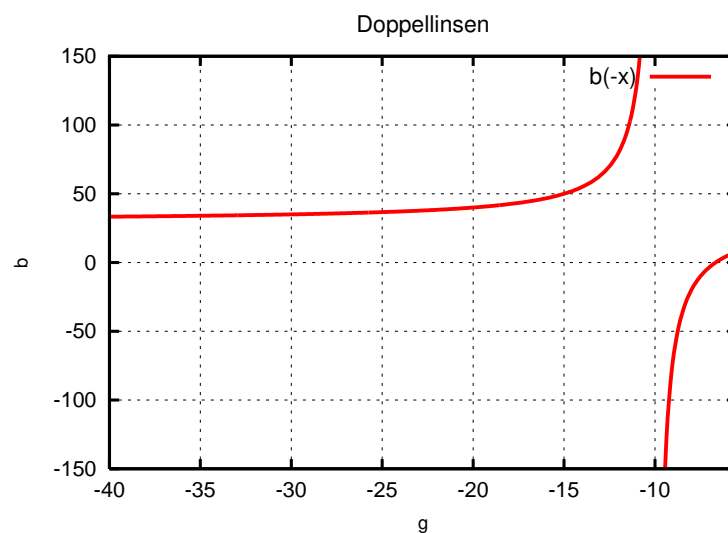


Abbildung 2.21.: Die Position des Bildes für verschiedene $x_g = -g_1$ im obigen Beispiel



2.4. Ebene Spiegel

(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 271]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 169]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1059])



Versuch zur Vorlesung:

Virtuelles Bild: Reflexion am ebenen Spiegel (Versuchskarte O-111)

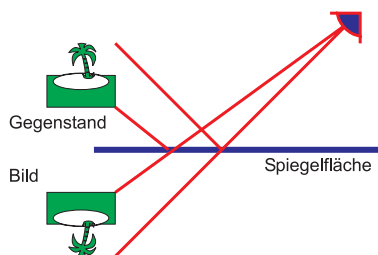


Abbildung 2.22.: Ebener Spiegel

Blickt man in einen ebenen Spiegel, so sieht man ein virtuelles Bild des Gegenstandes. Bei einem perfekten Spiegel ist das Bild nicht von einem wirklichen Gegenstand zu unterscheiden, ausser: links und rechts sind vertauscht. Eine andere Sichtweise ist auch, dass links und rechts bleiben, aber dass vorne und hinten vertauscht sind. Mehrere Spiegel erlauben Mehrfachbilder. Zwei Spiegel, die senkrecht aufeinander stehen, reflektieren das Licht in die gleiche Richtung zurück, aus der es gekommen ist.

2.5. Bilderzeugung mit sphärischen Spiegel



(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 277]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 170]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1062])

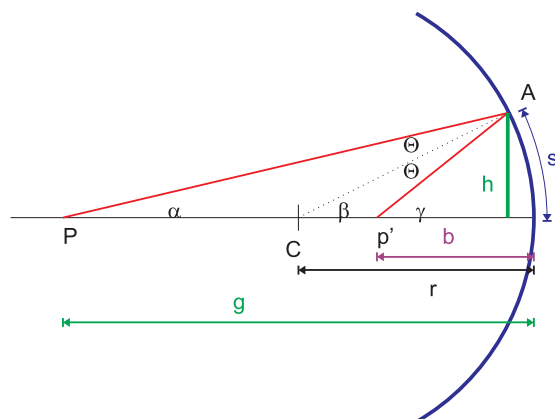


Abbildung 2.23.: Gekrümmter Spiegel

Bei einem gekrümmten Spiegel wird der Gegenstand P in das Bild P' abgebildet. C ist der Krümmungsmittelpunkt des Spiegels, deshalb sind die Winkel Θ der einfallenden und reflektierten Strahlen zu dieser Linie gleich. Es gilt (Aussenwinkel)

$$\beta = \Theta + \alpha \quad (2.5.1)$$

und (auch Aussenwinkel)

$$\gamma = \alpha + 2\Theta \quad (2.5.2)$$

Wir eliminieren Θ

$$2\beta = \alpha + \gamma \quad (2.5.3)$$

Für kleine Winkel (**paraxiale Näherung**) gilt, dass $\alpha \approx h/g$, $\beta = s/r \approx h/r$ und $\gamma \approx h/b$ ist, wobei g die *Gegenstandsweite*, b die *Bildweite*, r der Krümmungsradius des Spiegels und h der Abstand der Strahlen von der optischen Achse ist. Eingesetzt:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r} \quad (2.5.4)$$

Wenn der Gegenstand im unendlichen ist, $g = \infty$ ist $b = r/2$. Wir nennen diese Weite die

Brennweite

$$f = \frac{r}{2} \quad (2.5.5)$$

Die *Abbildungsgleichung*, die nicht nur für sphärische Spiegel gilt, sondern auch für Linsen, ist also

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (2.5.6)$$

Abbildungsgleichung eines sphärischen Spiegels

Der obige Spiegel ist ein *Konkavspiegel* (französisch: la cave: Keller (mit einem Kellergewölbe)). Bei einem *Konvexspiegel* gilt die Abbildungsgleichung auch, die *Brennweite* ist aber negativ.

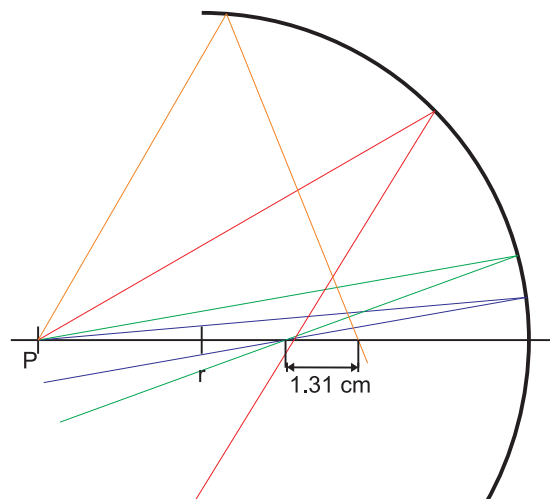


Abbildung 2.24.: Sphärische Aberration

Strahlen, die die *paraxiale Näherung* verletzen, werden nicht auf einen Punkt fokussiert. Sie bilden eine *Kaustik*, das Bild eines Punktes ist ausgedehnt. Dieser Abbildungsfehler, der allen sphärischen abbildenden Geräten eigen ist, heisst *sphärische Aberration*.

2.5.1. Konkavspiegel

(Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 178]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1067])

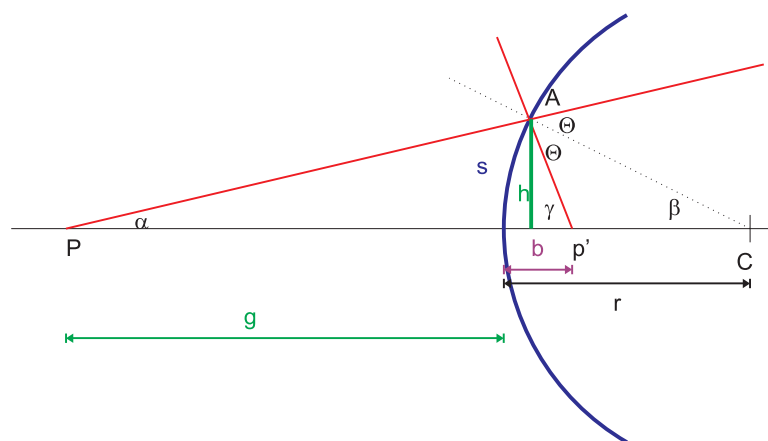


Abbildung 2.25.: Konkavspiegel

Die Berechnung der Abbildungsgleichung ist analog zu der eines Konkavspiegels. Für die Winkel können die folgenden Relationen aufgeschrieben werden:

$$\alpha + \gamma = 2\Theta \quad (2.5.7)$$

sowie

$$\beta + \Theta = \gamma \quad (2.5.8)$$

Wir eliminieren Θ und erhalten

$$2\beta = \gamma - \alpha \quad (2.5.9)$$

Für kleine Winkel gilt wieder $\alpha s/g \approx h/g$, $\beta = s/r \approx h/r$ und $\gamma \approx h/b$. Eingesetzt bekommen wir

$$\frac{1}{f} = \frac{2}{r} = \frac{1}{b} - \frac{1}{g} \quad (2.5.10)$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit der Gleichung (2.5.4) so sehen wir, dass formal die gleiche Abbildungsgleichung gilt, wenn wir die **Bildweite** und die **Brennweite negativ** wählen.

Wir halten fest:

Bei einem Konvexspiegel ist die **Brennweite negativ** (Zerstreuungsspiegel), bei einem Konkavspiegel **positiv** (Sammelspiegel).



2.5.2. Bildkonstruktion beim Hohlspiegel

(Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 177]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1065])



Versuch zur Vorlesung:

Optische Scheibe (Versuchskarte O-046)

Die Bildkonstruktion bei einem Hohlspiegel verläuft nach den folgenden Regeln:

- Jeder achsparallele Strahl verläuft nach der *Reflexion* durch den *Brennpunkt* (oder seine Verlängerung nach rückwärts geht durch den *Brennpunkt*).
- Jeder Strahl durch den *Brennpunkt* wird zu einem achsparallelen Strahl (oder jeder Strahl, dessen Verlängerung durch den *Brennpunkt* ginge, wird nach der *Reflexion* zu einem achsparallelen Strahl).
- Jeder radiale Strahl verläuft durch den Krümmungsmittelpunkt eines Spiegels und wird in sich selber zurück abgebildet.
- Jeder Strahl, der auf den Scheitelpunkt des Spiegels (da wo die optische Achse auf den Spiegel trifft) gerichtet ist, wird unter dem gleichen Winkel zur optischen Achse reflektiert.

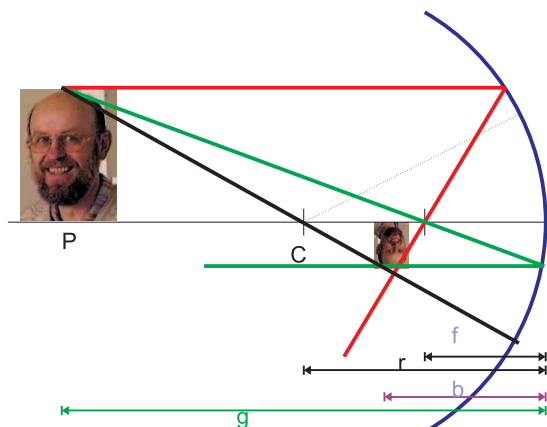


Abbildung 2.26.: Bildentstehung beim Konkavspiegel

Die Abbildung zeigt, wie nach den obigen Regeln, ein Bild konstruiert wird. Dass die Strahlen sich nicht in einem Punkt kreuzen, liegt daran, dass wir keine *paraxialen Strahlen* haben.

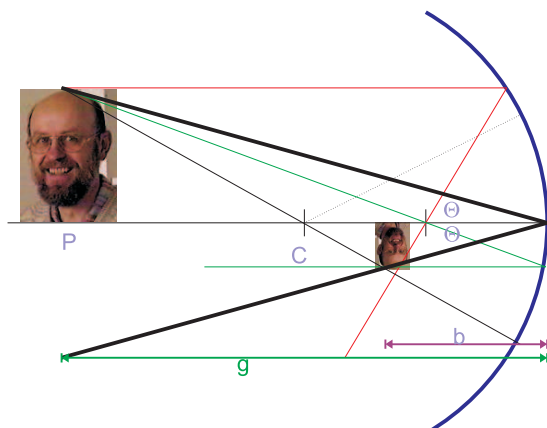


Abbildung 2.27.: Abbildungsmaßstab

Der *Abbildungsmaßstab* wird berechnet, indem wir den Strahl auf den Scheitel analysieren. Aus dem Strahlensatz ergibt sich

$$V = \frac{B}{G} = \frac{b}{g} \quad (2.5.11)$$

wobei G die Höhe des Gegenstandes und B die Höhe des Bildes ist.

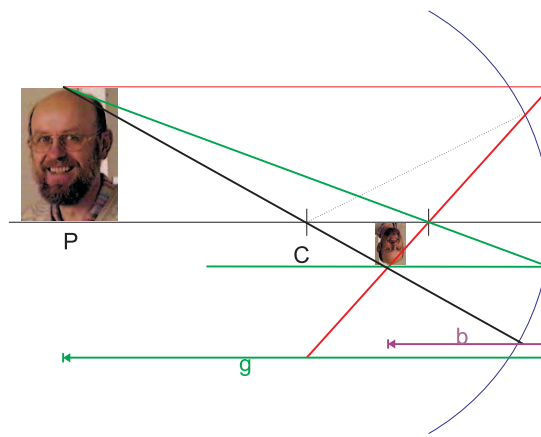


Abbildung 2.28.: Vereinfachung der Konstruktion

Für *paraxiale Strahlen* kann die Konstruktion vereinfacht werden, indem man die gekrümmte Fläche durch eine Tangentialebene am Scheitel des Spiegels ersetzt. Aus der Abbildung ist ersichtlich, dass die durch die sphärische Aberration ungenau gewordene Abbildung wieder genau wird. Die neu eingeführte Ebene nennt man *Hauptebene*.

g	+	Gegenstand vor dem Spiegel (reeller Gegenstand)
	-	Gegenstand hinter dem Spiegel (virtueller Gegenstand)
b	+	Bild vor dem Spiegel (reelles Bild)
	-	Bild hinter dem Spiegel (virtuelles Bild)
r,f	+	Krümmungsmittelpunkt vor dem Spiegel (Konkavspiegel)
	-	Krümmungsmittelpunkt hinter dem Spiegel (Konvexspiegel)

Tabelle 2.1.: Vorzeichenkonventionen für die Abbildung

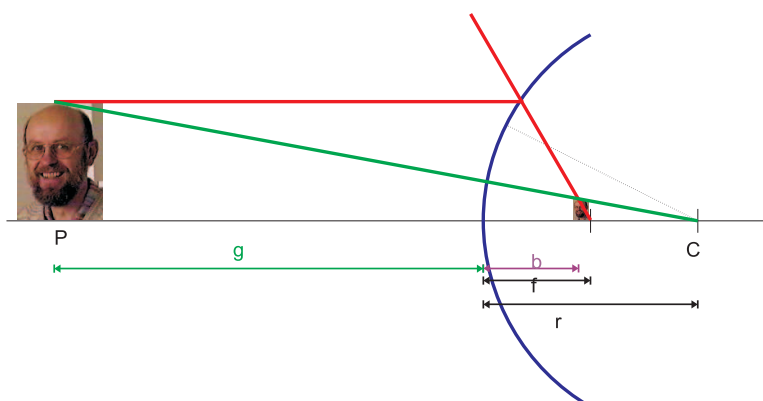


Abbildung 2.29.: Abbildung bei einem konvexen Spiegel

Bei einem konvexen Spiegel existiert ein virtuelles Bild hinter dem Spiegel. Die Abbildung zeigt die Bildkonstruktion.

2.6. Abbildungsfehler



(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 380]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 117,130])
 (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1081])

Es gibt die folgenden Abbildungsfehler

sphärische Aberration Wie bei Konkavspiegeln werden nicht achsennahe parallele Strahlen nicht auf einen Punkt fokussiert. Die sphärische Aberration entsteht bei kugelförmigen Spiegeln oder bei Linsen mit kugelförmigen Oberflächen. Parabelförmige Oberflächen würden für achsenparallele Strahlen keine sphärische Aberration zeigen¹.

¹Moderne *Objektive* haben asphärische Linsen, die bei grossen Blendenöffnungen eine bessere Abbildung ermöglichen

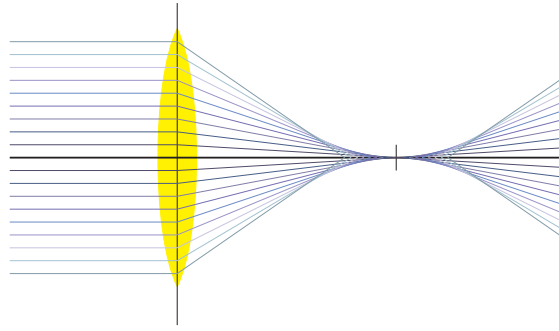


Abbildung 2.30.: Sphärische Aberration

Die von einem Punkt ausgehenden Strahlen formen eine Kaustik. Deshalb sind Fotografien, die mit kleinen Blendenöffnungen aufgenommen werden, schärfer abgebildet. Wird die Blendenöffnung zu fest geschlossen, verschmieren Beugungseffekte die Abbildung. Optimal sind Blenden zwischen 8 und 11.

chromatische Aberration Durch die chromatische Dispersion (Siehe Abschnitt 3.6) werden verschiedene Farben unterschiedlich stark gebrochen.

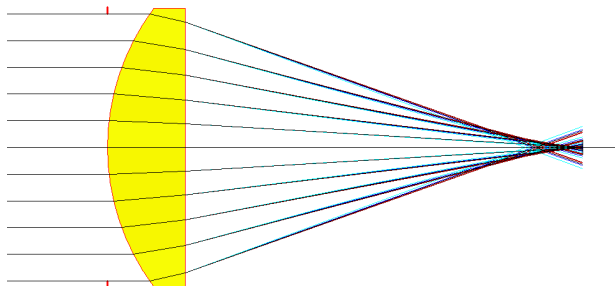


Abbildung 2.31.: Chromatische Aberration

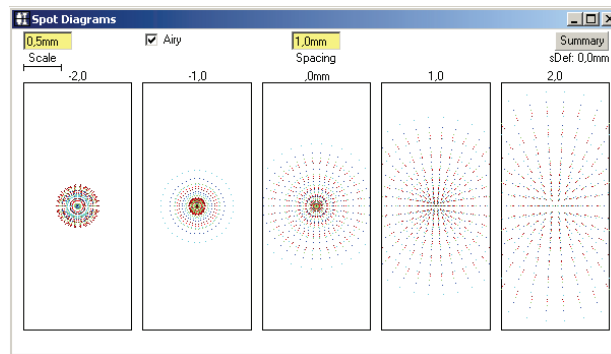


Abbildung 2.32.: Intensitätsverteilung im Fokus bei chromatischer Aberration

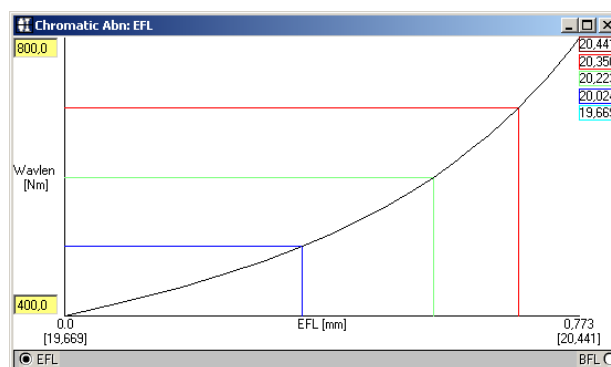


Abbildung 2.33.: Charakteristische Kurve bei chromatischer Abberation

Blaues Licht wird stärker gebrochen als rotes, also ist die *Brennweite* für rotes Licht länger als für blaues. Die Abbildung zeigt oben den Strahlengang und in der Mitte die Farbzusammensetzung des Fokus. Unten ist die Verschiebung des Fokus als Funktion der Farbe angegeben. Berechnet worden sind die Darstellungen mit [WinLens3D Basic](#).

Astigmatismus schiefer Bündel

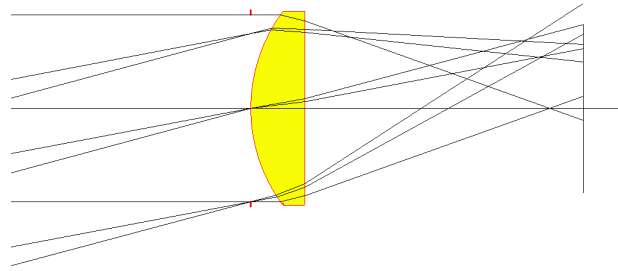


Abbildung 2.34.: Astigmatismus

Schiefe parallele Bündel von Licht werden auf einen Punkt fokussiert, dessen Abstand von der Linsenhauptebene umso grösser wird, je schief der Einfallswinkel ist. Deshalb sind Fotografien am Rand weniger scharf als im Zentrum.

3. Optische Instrumente



(Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1089])

3.1. Das Auge



(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 304]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1089])

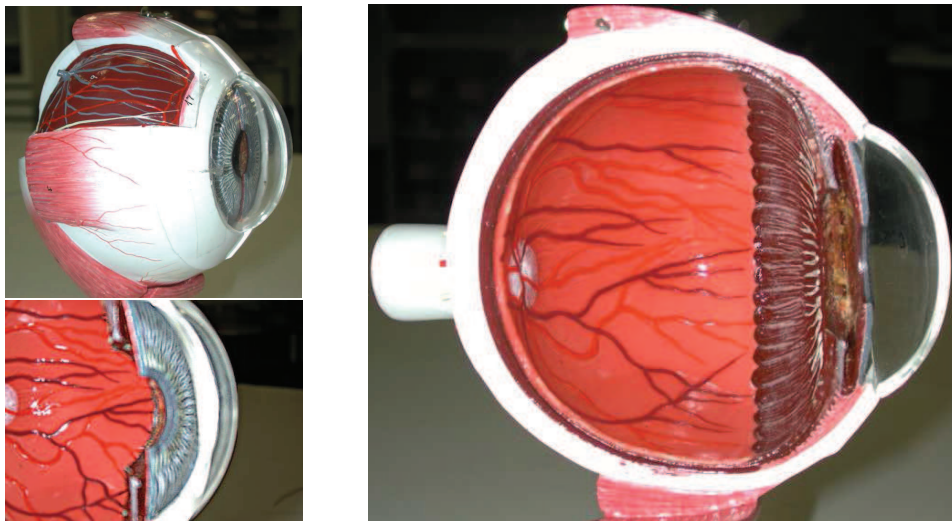


Abbildung 3.1.: Das Auge. Links oben eine Gesamtansicht eines Augenmodells. Rechts ein Schnitt durch das Auge mit der Iris links, dann der *Linse* und dem *Glaskörper*. Links unten eine Detailansicht der *Linse*.

Das Auge hat eine *Linse* mit einer *Brennweite* von etwa 2.5 cm (Abstand Linse-Netzhaut). **Achtung: Der Brechungsindexunterschied nach aussen (Linse zu Luft) und nach innen (Linse zu *Glaskörper*) ist verschieden. Deshalb ist die *Brennweite* der *Linse* ausserhalb kleiner als innerhalb des Auges.** Die Krümmung der *Linse* kann eingestellt werden: *Akkomodation*.



Versuch zur Vorlesung:

Augen-Modell (Versuchskarte O-132)

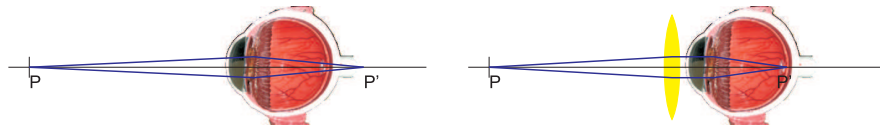


Abbildung 3.2.: Weitsichtiges Auge: Links ohne Brille, rechts mit Korrektur

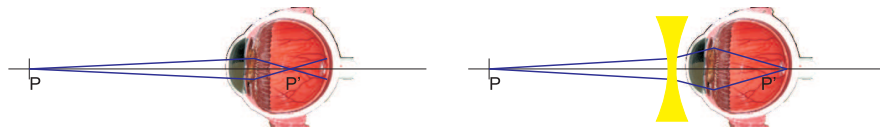
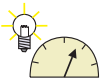


Abbildung 3.3.: Kurzsichtiges Auge: Links ohne Brille, rechts mit Korrektur



3.2. Die Lupe

(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 318]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 100,105])
 (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1093])



Versuch zur Vorlesung:

Lupe und Mikroskop (Versuchskarte O-081)

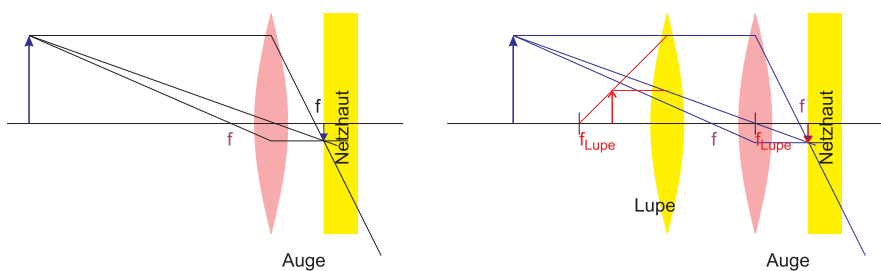


Abbildung 3.4.: Wirkungsweise einer Lupe

Die Wirkungsweise einer Lupe kann nur verstanden werden, wenn wir das Auge mit berücksichtigen. Auf der linken Seite finden sie eine Skizze, wie ein Bild auf der Netzhaut des Auges entsteht. Die *Brennweite* des Auges sei dabei f_a . Der blaue Pfeil wird entsprechend den Abbildungsgesetzen auf die Netzhaut abgebildet.

Die Lupe (rechtes Bild) wird nun so vor das Auge gehalten, dass ihr *Brennpunkt* auf der Linsenachse des Auges ist. Die vom roten Pfeil (innerhalb der *Brennweite*

der Lupe) ausgehenden Strahlen werden von der Lupe so geformt, dass sie nach ihr gleich wie die Strahlen des blauen Pfeils ohne Lupe sind. Das Bild des roten Pfeils ist gleich gross wie das des blauen. Die Lupe hilft dem Auge, ein vergrössertes Bild zu sehen. Sie vergrössert den Winkel, unter dem ein Gegenstand gesehen wird.

Oft wird der Gegenstand in den *Brennpunkt* der Lupe gebracht. Wenn das Auge ohne Lupe einen Gegenstand der Länge G im Abstand s_0 (Nahpunkt, $s_0 = 25\text{cm}$) beobachtet, ist der *Schwinkel* $\varepsilon_0 = \frac{G}{s_0}$. Eine Lupe vergrössert den *Schwinkel* eines Gegenstandes auf den Wert $\varepsilon = \frac{G}{f}$. Die *Vergrößerung der Lupe* ist

$$V_L = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{s_0}{f} \quad (3.2.1)$$

Allgemein:

$$\text{Vergrößerung} = \frac{\text{Schwinkel mit Instrument}}{\text{Schwinkel im Abstand des Nahpunktes ohne Instrument}} \quad (3.2.2)$$

3.3. Die Kamera



(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 327]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 228]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1095])

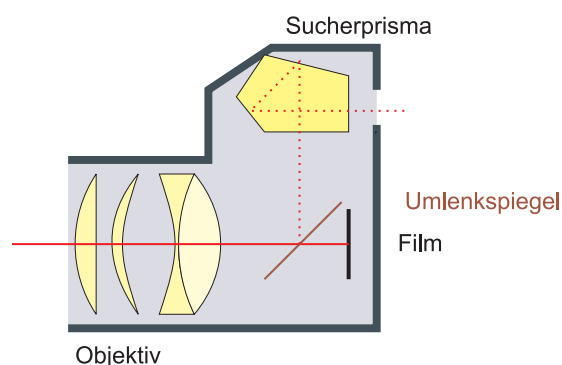


Abbildung 3.5.: Schematische Skizze einer Spiegelreflexkamera

Eine Kamera besteht aus einem *Objektiv*, das in einer Führung verschiebbar gelagert ist, dem Film oder der CCD und einer Beobachtungsoptik. Bei einer Spiegelreflexkamera sind die Beobachtungsoptik und der Strahlengang des *Objektivs* teilweise identisch. Wie weit müssen *Objektive* bewegt werden? Wir verwenden $1/f = 1/b + 1/g$ und beachten, dass bei einer auf ∞ eingestellten Kamera das Objektiv gerade f vom Film entfernt ist.

Distanz	20mm	50mm	100mm	200mm	1000mm
100m	20.004mm	50.025mm	100.1mm	200.4mm	1010.1mm
Verschiebung	0.004mm	0.025mm	0.1mm	0.4mm	10.1mm
30m	20.013mm	50.08mm	100.3mm	201.3mm	1034.4mm
Verschiebung	0.013mm	0.08mm	0.3mm	1.3mm	34.4mm
10m	20.04mm	50.25mm	101mm	204.1mm	1111mm
Verschiebung	0.04mm	0.25mm	1mm	4.1mm	111mm
3m	20.13mm	50.85mm	103.4mm	214mm	1500mm
Verschiebung	0.13mm	0.85mm	3.4mm	14mm	500mm
1m	20.4mm	52.6mm	111mm	250mm	-
Verschiebung	0.4mm	2.6mm	11mm	50mm	-
0.3m	21.4mm	60mm	150mm	600mm	-
Verschiebung	1.4mm	10mm	15mm	400mm	-
0.1m	25mm	100mm	-	-	-
Verschiebung	5mm	50mm	-	-	-
0.03m	60mm	-	-	-	-
Verschiebung	50mm	-	-	-	-

Fett angegeben sind die Kombinationen von Distanzen und Brennweiten, die wahrscheinlich nicht einstellbar sind, weil die Verschiebungen zu klein sind. **Rot** angegeben sind die Kombinationen von Distanzen und Brennweiten, die wahrscheinlich nicht einstellbar sind, weil die Verschiebungen zu gross sind.

Die Blendenzahl ist das Verhältnis der *Brennweite* f zum Durchmesser der d der Öffnung der Blende.

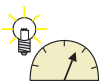
$$\text{Blendenzahl} = \frac{f}{d} \quad (3.3.1)$$

Bei einem *Objektiv* mit der *Brennweite* 50 mm und einer Blendenzahl von 8 ist die Öffnung also $d = 6.25\text{mm}$.



3.4. Das Mikroskop

(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 324]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 147]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1098])



Versuch zur Vorlesung:

Lupe und Mikroskop (Versuchskarte O-081)

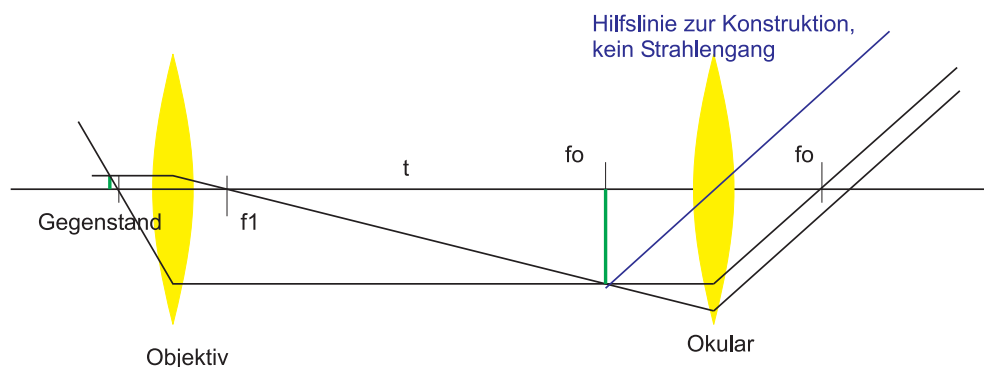


Abbildung 3.6.: Strahlengang in einem Mikroskop

Bei einem Mikroskop ist ein Gegenstand so nahe am *Brennpunkt* einer *Objektivlinse*, dass ein stark vergrößertes Bild erzeugt wird. Dieses Bild, **Zwischenbild** genannt, wird in einer Ebene im Abstand t vom zweiten *Brennpunkt* des *Okulars* erzeugt. Würde man in dieser Ebene eine *Kamera* anbringen, könnte man ein Bild des Gegenstandes aufnehmen. Der *Abbildungsmaßstab* ist

$$V_{\text{Objektiv}} = \frac{t}{f_1} \quad (3.4.1)$$

Die Strahlen gehen jedoch weiter und werden von einer zweiten *Linse*, dem *Okular* weiterverarbeitet. Das *Okular* ist so platziert, dass das von der ersten *Linse* erzeugte Bild genau auf seinem *Brennpunkt* erzeugt wird. Die Strahlen aus der ersten *Linse*, dem *Objektiv*, werden nun so gebrochen, dass sie parallel sind. Dies ist die gleiche Funktion, wie sie die Lupe (Siehe Abschnitt 3.2) hatte. Nur das Auge, hier nicht eingezeichnet, kann wieder ein Bild formen, das nun aber sehr stark vergrößert ist.

Die *Winkelvergrößerung des Okulars (Lupe)* ist

$$V_{\text{Okular}} = \frac{s_0}{f_O} \quad (3.4.2)$$

Damit wird die *Gesamtvergrößerung*

$$V = V_{\text{Objektiv}} V_{\text{Okular}} = \frac{t s_0}{f_1 f_O} \quad (3.4.3)$$

In vielen Lehrbüchern findet man Zeichnungen, in denen die Lichtstrahlen beim Zwischenbild ihre Richtung ändern. Dies ist in Luft nicht möglich, und Streukörper gibt es in einem Mikroskop-tubus nicht. Zur Konstruktion des Bildes ist diese Vorgehensweise jedoch gestattet.

Ein *Objektiv* mit der *Vergrößerung* 60 bei einer Tubuslänge von 180mm hat eine

Brennweite $f_1 = 3\text{mm}$. Ein Okular mit der Vergrößerung 20 hat die Brennweite $f_0 = 12.5\text{mm}$.



3.5. Das Teleskop oder Fernrohr

(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 332]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 158]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1099])

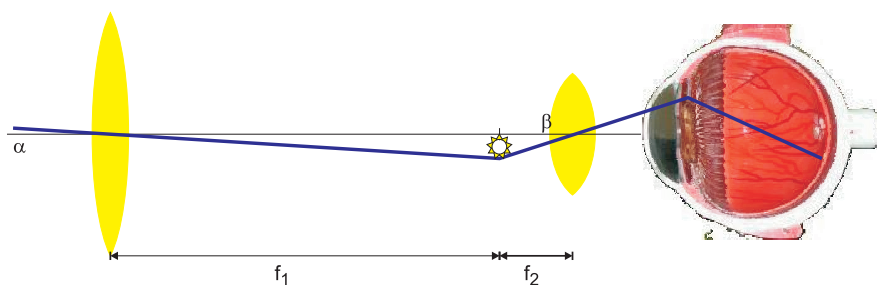


Abbildung 3.7.: Das *Teleskop*. Die angegebenen Strahlen werden zur Konstruktion des Bildes benötigt. Sie stellen jedoch nicht den Strahlengang dar!

Der Zweck eines *Teleskops* ist, den *Schwinkel* zu vergrößern. Das *Objektiv* sammelt dabei möglichst viel Licht, ändert den Winkel aber nicht. Das *Zwischenbild* des *Objektivs* hat die Grösse $B = f_1\alpha$. Das *Okular* (Lupe) erzeugt also den Winkel $\beta = \frac{B}{f_2}$. Zusammen ergibt sich die *Vergrößerung*

$$V = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{f_1}{f_2} \quad (3.5.1)$$

Ob ein Stern gesehen werden kann, hängt allein vom Verhältnis

$$\left(\frac{\text{Ø Linse}}{\text{Ø Augenpupille}} \right)^2$$

ab. Deshalb hätte man gerne möglichst grosse *Teleskope* in der *Astronomie*.

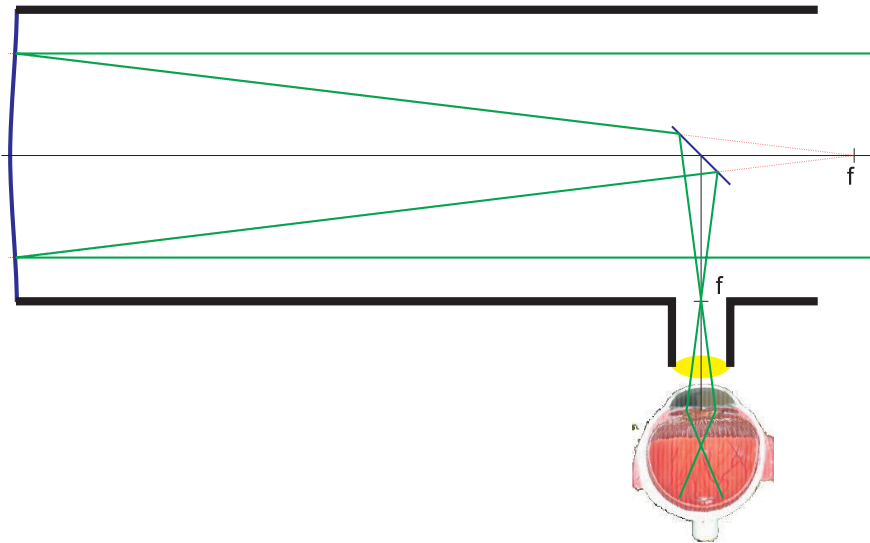


Abbildung 3.8.: Das *Spiegelteleskop*

Da Linsen mit Durchmessern von mehr als einigen 10 cm unhandlich schwer sind und schwierig herzustellen, verwendet man für die lichtstärksten *Teleskope* Spiegel. Im folgenden sind einige hübsche Bilder des *Hubble-Teleskops* gezeigt.

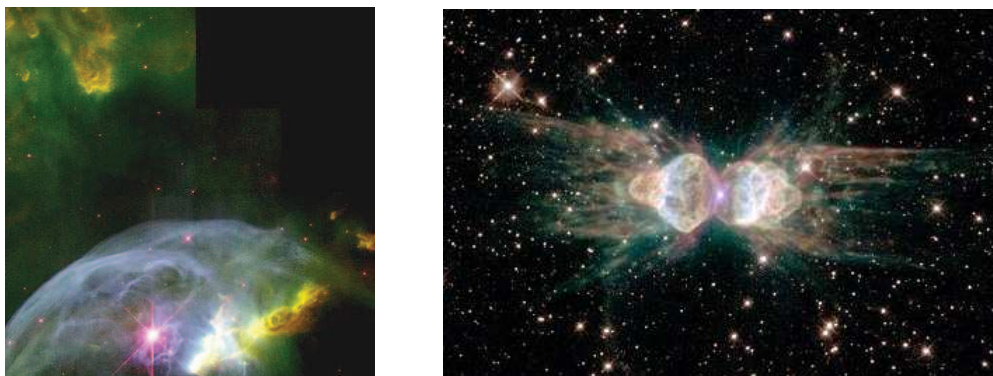


Abbildung 3.9.: Links: Eine Hubble-Aufnahme, die den Blasen-Nebel NGC 7635 zeigt ([[NU99](#)]). Rechts: Der so genannte Ameisen-Nebel"Menzel 3. Die Sternengruppe erhielt ihren Namen aufgrund der Ähnlichkeit zu Kopf und Brustkorb der gemeinen Gartenameise ([[NAS97](#)]).



Abbildung 3.10.: Links: Zwei Galaxien tauschen Materie aus ([NAS10]), sichtbar als dunkles Band in der Mitte. Rechts: Gigantische Gasgebilde, die einen verglühenden Stern umkreisen. ([FHT96])



Abbildung 3.11.: Links: Hubble-Aufnahme vom Sternbild Aquila ([NAS00b]). Rechts: Der Schlüsselloch-Nebel ([NAS00a]), rund 8.000 Lichtjahre von der Erde entfernt, ist Teil des Carina-Nebels. Der Carina-Nebel enthält Sterne, die zu den heissesten und grössten bekannten Sternen gehören. Der Schlüsselloch-Nebel, rund 8.000 Lichtjahre von der Erde entfernt, ist Teil des Carina-Nebels. Der Carina-Nebel enthält Sterne, die zu den heissesten und grössten bekannten Sternen gehören. (NASA)



3.6. Das *Prisma*: ein optisches Instrument mit Dispersion

(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 106, 284]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 415])
 (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1038])



Versuch zur Vorlesung:

Optische Scheibe (Versuchskarte O-046)

Im allgemeinen Falle hängt die Phasengeschwindigkeit einer Welle von der Frequenz und vom Medium ab. Das heisst für Licht, dass jede Farbe eine eigene Ausbreitungsgeschwindigkeit hat.

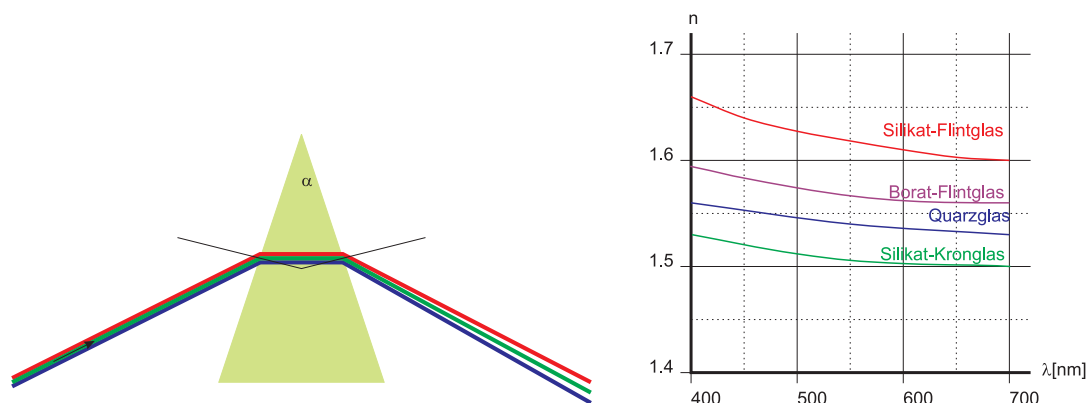


Abbildung 3.12.: Links: Strahlengang durch ein Prisma. Rechts: Dispersion einiger Materialien

**Versuch zur Vorlesung:** $n(\lambda)$ Abhängigkeit beim Prisma (Versuchskarte O-074)

Durch die Dispersion des Lichtes, das heisst, dass die Brechzahl von der Wellenlänge abhängt, werden die verschiedenen Farben unterschiedlich gebrochen. Jedes Mal, wenn Licht durch die Grenzfläche Luft-Materie geht, werden unterschiedliche Farben unterschiedlich gebrochen. Dies bewirkt die folgenden Effekte:

- die Chromatische Aberration bei Linsen (Farbsäume)
- die Möglichkeit, ein Prisma als Spektralapparat zu verwenden
- das Auseinanderlaufen von Signalen in Glasfasern
- der Regenbogen

Um die Physik der Dispersion zu klären, müssen wir ein physikalisches Modell finden, bei dem eine Frequenzabhängigkeit auftritt. Wir erinnern uns aus der Mechanik, dass bei Oszillatoren eine Resonanz auftritt. Als Beispiel kann man ein Feder-Masse-System betrachten.

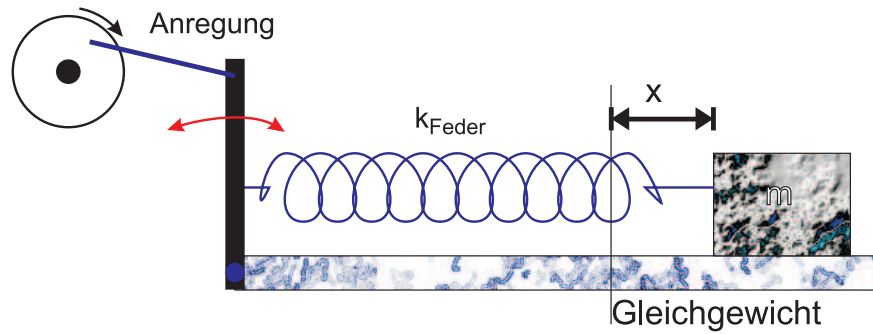


Abbildung 3.13.: Modell eines Oszillators

In diesem Feder-Masse-Modell wird die Schwingung durch $\hat{x}(t) = x_0 \cos \omega t$ ange-
regt. Die Amplitude verhält sich als Funktion der Frequenz wie

$$x(\omega) = \frac{x_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \frac{\omega^2 \omega_0^2}{Q^2}}} \quad (3.6.1)$$

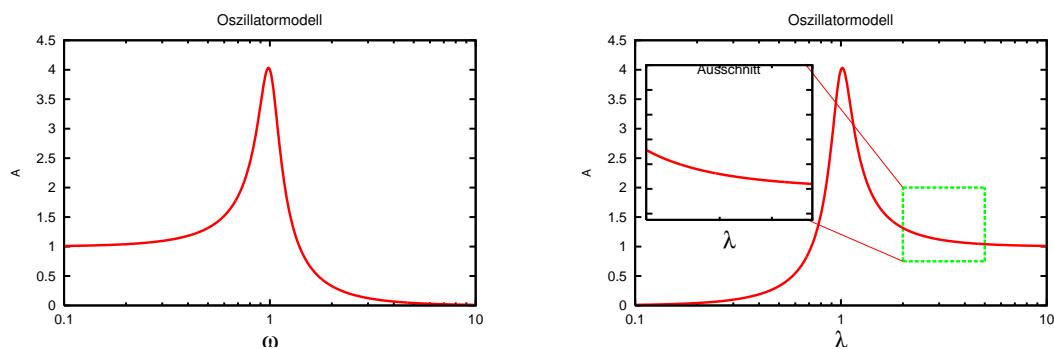


Abbildung 3.14.: Resonanzkurve links als Funktion der Frequenz ω und rechts als
Funktion der Wellenlänge λ . Der Ausschnitt zeigt, dass es einen
Bereich der Resonanzkurve gibt, der genau so aussieht wie der
Verlauf des Brechungsindex.

Aus diesen Kurven gewinnt man die Anregung, dass ein Feder-Masse-System als
Modell für die Dispersion geeignet sein könnte.

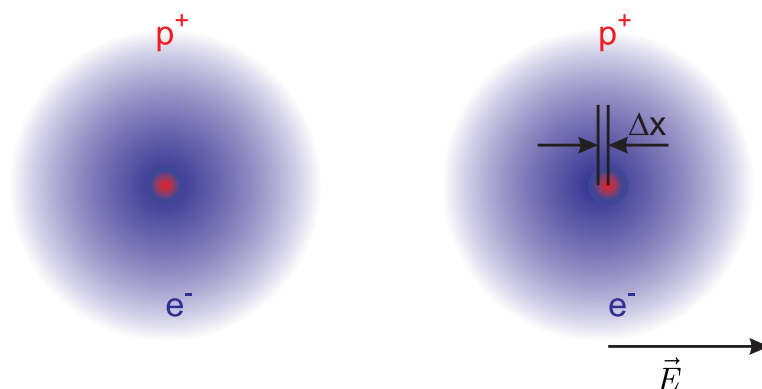


Abbildung 3.15.: Links liegt die Elektronenwolke zentriert über dem positiv geladenen Kern. Wenn ein elektrisches Feld \vec{E} eingeschaltet wird, wird die Elektronenwolke entgegengesetzt zu \vec{E} verschoben.

Ein fester Körper besteht aus Atomen. Diese bestehen aus Elektronen, deren Aufenthaltswahrscheinlichkeit über einen Durchmesser von 100pm ausgeschmiert ist, sowie aus einem *Atomkern*, der im Zentrum der Elektronenwolke liegt und einen Durchmesser von ungefähr 1fm hat. Wenn ein elektrisches Feld \vec{E} angelegt wird, dann verschiebt sich die Elektronenwolke gegen den Kern um eine Distanz Δx . Diese Verschiebung soll klein gegen den Durchmesser der Elektronenwolke sein. Dann können wir annehmen, dass die Ladung der Elektronenwolke homogen verteilt ist. Da das Coulombgesetz für die elektrostatischen Kräfte die gleiche Form wie das Gravitationsgesetz hat, hängt die Kraft für die Testladung des Kerns linear von der Auslenkung ab, und zwar so, dass der Schwerpunkt des Kerns und der der Elektronenwolke wieder übereinander gelegt werden sollen. Wir haben also eine zur Auslenkung proportionale rücktreibende Kraft, wie bei einer Feder.

Deshalb nehmen wir an, dass das Elektron-Kern-System als Feder-Masse-System beschrieben werden kann. Da ein Elektron nicht nur Kräfte auf seinen Kern, sondern auch auf die benachbarten ausübt, müssen wir ein dreidimensionales Netz von Federn und Massen betrachten. Wir vereinfachen das System hier auf eine *lineare Federkette*.

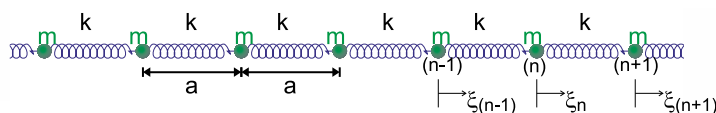


Abbildung 3.16.: Federmodell für die Dispersion nach (Siehe Känzig, Mechanik und Wellenlehre [Kän78, pp. 292]) .

Wir betrachten eine longitudinale Welle auf einem Feder-Masse-System. Die Be-

wegungsgleichung für die n-te Masse ist

$$m\ddot{\xi}_n = -k(\xi_n - \xi_{n-1}) + k(\xi_{n+1} - \xi_n) = k(\xi_{n+1} + \xi_{n-1}) - 2k\xi_n \quad (3.6.2)$$

analog zur Gleichung für ein inneres Pendel bei gekoppelten Pendeln. Bei sehr kleinen Frequenzen schwingen alle Massen in Phase: wie bei den gekoppelten Pendeln gibt die gleichsinnige Bewegung aller Massen die tiefste Frequenz, die hier, da wir eine unendliche Anzahl Massen annehmen, null ist. Die maximale Frequenz erhält man dann, wenn jeweils zwei benachbarte Massen gegensinnig schwingen. Eine höher Schwingungsfrequenz ist nicht möglich. Die minimale Wellenlänge ist $\lambda_{min} = 2a$ und entsprechend $k_{max} = \frac{\pi}{a}$. **Beachte, dass $k_{max} = 2\pi/\lambda$ die Wellenzahl ist, während k die Federkonstante bedeutet.**

Wir setzen $\Omega_0^2 = \frac{4k}{m}$ und erhalten

$$\ddot{\xi}_n = \Omega_0^2 \left[\frac{1}{4}(\xi_{n+1} + \xi_{n-1}) - \frac{1}{2}\xi_n \right] \quad (3.6.3)$$

Wir setzen als vorläufige Lösung für $\lambda > 2a$ an: $\xi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$. Da die Schwingung nur für diskrete Positionen definiert ist, ersetzen wir $x = na$ und erhalten als endgültigen Lösungsansatz

$$\xi_n = \xi(n, t) = Ae^{i(kna - \omega t)} \quad (3.6.4)$$

Eingesetzt in die Bewegungsgleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} -\omega^2 e^{ikna} &= \Omega_0^2 \left[\frac{1}{4} \left(e^{ik(n-1)a} + e^{ik(n+1)a} \right) - \frac{1}{2} e^{ikna} \right] \\ \omega^2 &= \frac{1}{2} \Omega_0^2 \left[1 - \frac{1}{2} \left(e^{ika} + e^{-ika} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \Omega_0^2 [1 - \cos(ka)] \\ &= \Omega_0^2 \sin^2 \frac{ka}{2} \end{aligned} \quad (3.6.5)$$

Die Dispersionsbeziehung für die Feder-Masse-Kette ist

$$\omega(k) = \Omega_0 \sin \frac{ka}{2} \quad (3.6.6)$$

- Für lange Wellen $\lambda \gg a$ oder $ka \ll 2\pi$ ist $\sin \frac{ka}{2} \approx \frac{ka}{2}$. Damit ist $\omega(k) \approx \frac{1}{2} \Omega_0 ka$.

Mit der Definition der *Phasengeschwindigkeit* $c_P = \omega/k$ erhalten wir

$$c_P \approx \frac{1}{2} \Omega_0 a = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} a$$

Die Gruppengeschwindigkeit $c_G = \frac{d\omega}{dk}$ ist

$$c_G \approx \frac{1}{2} \Omega_0 a = c_P$$

- Für Wellen mit $\lambda = \lambda_{min} = 2a$ ist die Phasengeschwindigkeit

$$c_P = \frac{\Omega_0}{\pi/a} = \frac{\Omega_0 a}{\pi} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} a$$

und die Gruppengeschwindigkeit

$$c_G = \left. \frac{d}{dk} \Omega_0 \sin \frac{ka}{2} \right|_{\pi/a} = \Omega_0 \frac{a}{2} \cos \frac{ka}{2} \Big|_{\pi/a} = 0$$

- Für $\lambda < 2a$ wird die Welle exponentiell gedämpft.

Wir können das Gefundene auf das Problem des Brechungsindex wie folgt zurückrechnen:

- Die Phasengeschwindigkeit c_P ist für die Berechnung der Ausbreitung zu nehmen.
- Die Phasengeschwindigkeit ist

$$c_P(k) = \frac{\omega(k)}{k} = \frac{\Omega_0 \sin \frac{ka}{2}}{k}$$

- Der dazugehörige Brechungsindex ist

$$n(k) = \frac{c_0}{c_P} = \frac{c_0 k}{\Omega_0 \sin \frac{ka}{2}}$$

wobei c_0 die Vakuumlichtgeschwindigkeit ist.

- Mit $k = 2\pi/\lambda$ erhalten wir

$$n(\lambda) = \frac{c_0 2\pi}{\lambda \Omega_0 \sin \frac{2\pi a}{2\lambda}} = \frac{2\pi c_0}{\Omega_0 \lambda \sin \frac{\pi a}{\lambda}}$$

- Wir verwenden die Werte für Silikat-Flintglas und passen die obige Gleichung an.

λ	n_{ist}	$n_{berechnet}$
400nm	1.660	1.655
450nm	1.645	1.636
500nm	1.630	1.622
550nm	1.620	1.612
600nm	1.610	1.605
650nm	1.605	1.599
700nm	1.600	1.595

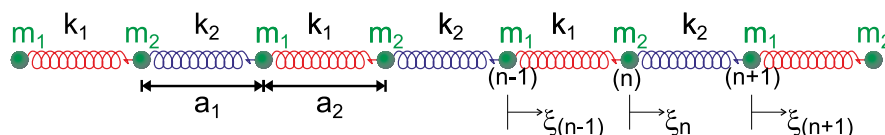
Tabelle 3.1.: Brechungsindex für Flintglas

Diese Werte wurden mit den folgenden Parametern erreicht:

Parameter	Wert
c_0	$3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
k/m	$1.322 \cdot 10^{15} 1/\text{s}^2$
oder mit $k = 1 \text{ N/m}$: m	$7.56 \cdot 10^{-16} \text{ kg}$
a	$7.24 \cdot 10^{-8} \text{ m}$

Tabelle 3.2.: Parameter für die Berechnung

Die Werte für a und m sind grösser als die erwarteten Werte von $a = 10^{-10} \text{ m}$ und $m = 1.6 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \times 28 = 4.5 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$. Der Wert für a deutet darauf hin, dass man nicht ein Atom für sich, sondern eine Gruppe von 724 Atomen betrachten muss. Die Masse in diesem Volumen wäre dann etwa $m = 1.7 \cdot 10^{-17} \text{ kg}$. Damit kann man berechnen, dass die Federkonstante $k = 1.322 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-2} \times 1.7 \cdot 10^{-17} = 0,023 \text{ N/m}$ sein muss.



Dispersion einer zweiatomigen Federkette

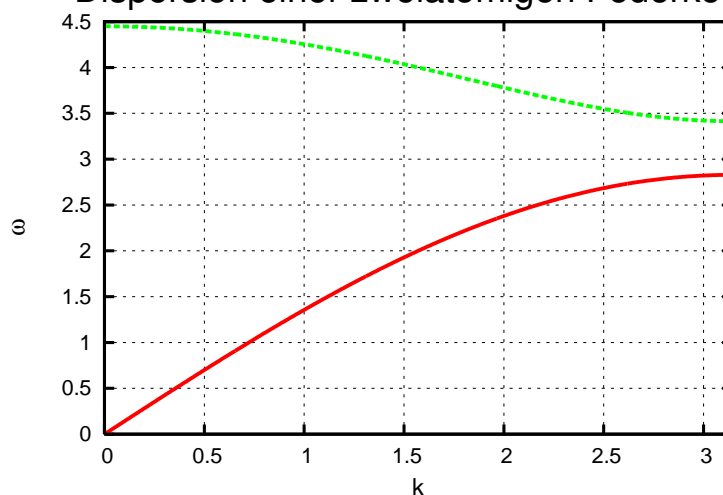


Abbildung 3.17.: Dispersionsrelation für Federketten mit zwei unterschiedlichen Atomen.

Wenn eine Federkette mit einer regelmässigen Anordnung zweier ungleicher Massen gebildet wird, tritt zum von den vorherigen Ausführungen bekannten **akustischen Zweig** ein optischer Zweig. Zusätzlich gibt es Frequenzen, für die es keinen reellen \mathbf{k} -Vektor gibt. Diese Frequenzen (oder über $E = \hbar\omega$ auch diese Energien) sind keine propagierenden Wellen möglich. Gibt es neben longitudinalen auch transversale Wellen, zeigt die Dispersionsrelation nicht einen sondern drei Zweige akustischer

Phononen.

Schwerewellen im tiefen Wasser haben die Dispersionsbeziehung

$$c_S^2 = \frac{g}{k} = \frac{1}{2\pi} g \lambda \quad (3.6.7)$$

Eine Konsequenz ist, dass sehr lange Wellen sehr schnell sind (Bsp. Tsunamis)

- $c_S = 300 \text{ m/s}$
- Dann ist $\lambda = 2\pi c_S^2 / g \approx 2 * 3 * 300 * 300 / 10 = 54000 \text{ m}$

Ein Puls oder eine Wellengruppe besteht aus Wellen benachbarter Frequenz. Analog zur Modulation¹ besteht ein Puls aus einer Einhüllenden sowie einer Phase, die für sich aber keine Information trägt. Eine längere Rechnung [Kän78] ergibt, dass die resultierende Wellenfunktion aus harmonischen Welle $e^{i(k_0 x - \omega t)}$ sowie der Modulation $G\left(x - \frac{d\omega}{dk}\bigg|_{k_0} t\right)$. Die resultierende Welle ist

$$\xi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(k_0 x - \omega t)} G\left(x - \frac{d\omega}{dk}\bigg|_{k_0} t\right) \quad (3.6.8)$$

Die Gruppengeschwindigkeit

$$v_G = \frac{d\omega}{dk}\bigg|_{k_0} \quad (3.6.9)$$

Bei unserem Feder-Masse-System ist $v_G = 0$ wenn $\lambda = 2a$ ist. Das heisst, der Puls, der die Information trägt, ist **ortsfest**. Wenn v_G nicht konstant ist, bewegen verändert sich die Form des Pulses, da die verschiedenen Frequenzanteile sich unterschiedlich schnell ausbreiten.



Versuch zur Vorlesung:

Gruppen- und Phasengeschwindigkeit bei Dispersion (Versuchskarte SW-093)

Lösungsmöglichkeiten

- Dispersionskompensation. Sie ist aufwendig und wird hauptsächlich bei Kurzpuls-Lasersystemen angewandt.
- Betrieb des Systems bei einer Wellenlänge, bei der die Dispersion minimal, also v_G möglichst konstant ist. Dies wird bei der optischen Kommunikation angewandt (Wellenlängen 1300 nm und 1500 nm).
- Man setzt die Datenrate auf niedrigere Werte, verbreitert also die Pulse und minimiert so die Fehler durch die Dispersion. Bis zu einer Verringerung der übertragenen Datenrate um den Faktor 2 kann der Geschwindigkeitsverlust meist durch die Anwendung von Kompressionsalgorithmen minimiert werden.

¹Dabei muss ωt durch $kx - \omega t$ ersetzt werden.

4. Physikalische Begründung der geometrischen Optik

4.1. Das Fresnel-Huygenssche Prinzip



(Siehe Hecht, Optik [[Hec](#), pp. 163, 650]) (Siehe Pérez, Optik [[Pér96](#), pp. 328])
(Siehe Tipler, Physik [[TM04](#), pp. 1028])

Die Beugung von Wasserwellen an einem Objekt kann mit dem *Prinzip von Fresnel-Huygens* erklärt werden.

Das Huygenssche Prinzip

Jeder Punkt einer bestehenden Wellenfront ist Ausgangspunkt einer neuen **kugelförmigen** Elementarwelle, die die gleiche Ausbreitungsgeschwindigkeit und Frequenz wie die ursprüngliche Welle hat. Die Einhüllende aller Elementarwellen ergibt die Wellenfront zu einem späteren Zeitpunkt.

Man nimmt eine Momentaufnahme des Wellenbildes eines bestimmten Wellenberges und nimmt jeden Punkt auf diesem Wellenberg als Ausgangspunkt einer neuen *Kreiswelle* (*Kugelwelle* in 3 Dimensionen).

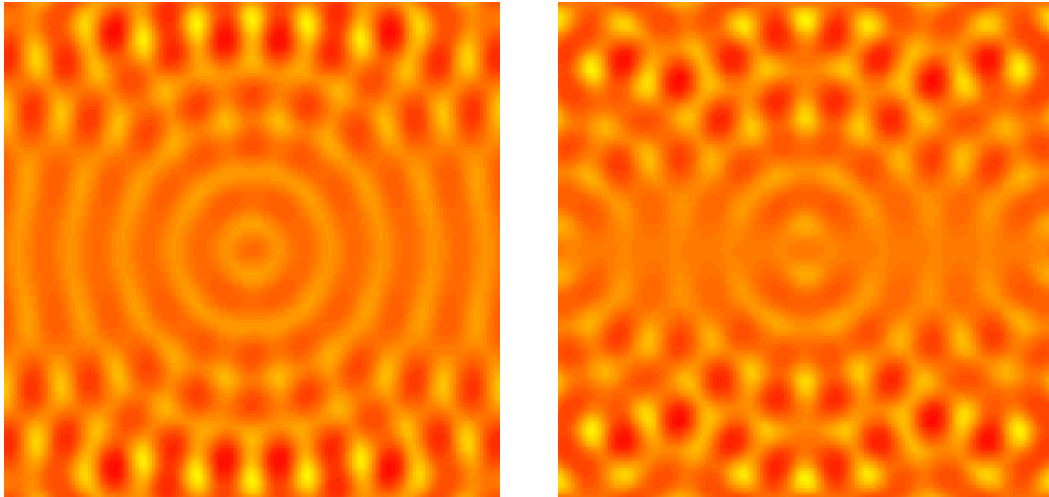


Abbildung 4.1.: *Huygenssches Prinzip*. Links die Interferenz von 5 *Kreiswellen* auf einer horizontalen Linie, die 4 mal so lang ist wie die Bildkante. Rechts das gleiche mit 9 *Kreiswellen*.

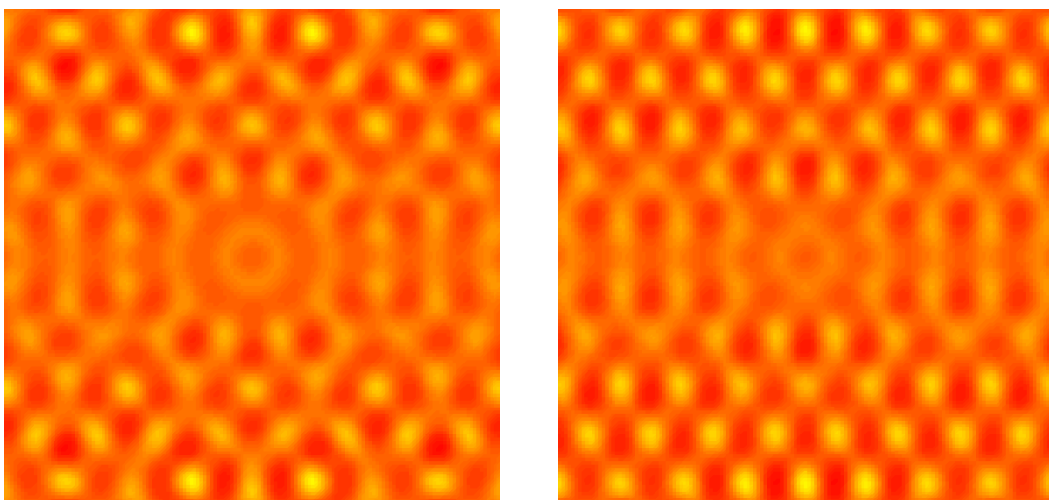


Abbildung 4.2.: *Huygenssches Prinzip*. Links die Interferenz von 17 *Kreiswellen* auf einer horizontalen Linie, die 4 mal so lang ist wie die Bildkante. Rechts das gleiche mit 33 *Kreiswellen*.

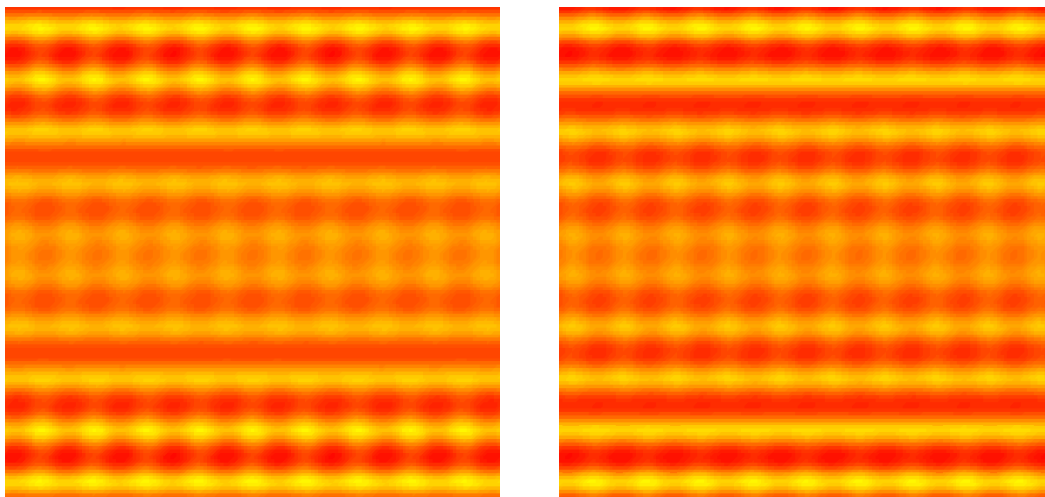


Abbildung 4.3.: *Huygensches Prinzip*. Links die Interferenz von 65 *Kreiswellen* auf einer horizontalen Linie, die 4 mal so lang ist wie die Bildkante. Rechts das gleiche mit 129 *Kreiswellen*.

Die Beugung an einem Spalt kann so verstanden werden, dass nicht mehr *Kreiswellen* aus einem grossen Bereich, sondern nur noch *Kreiswellen* aus dem Spalt zum neuen *Wellenbild* beitragen.

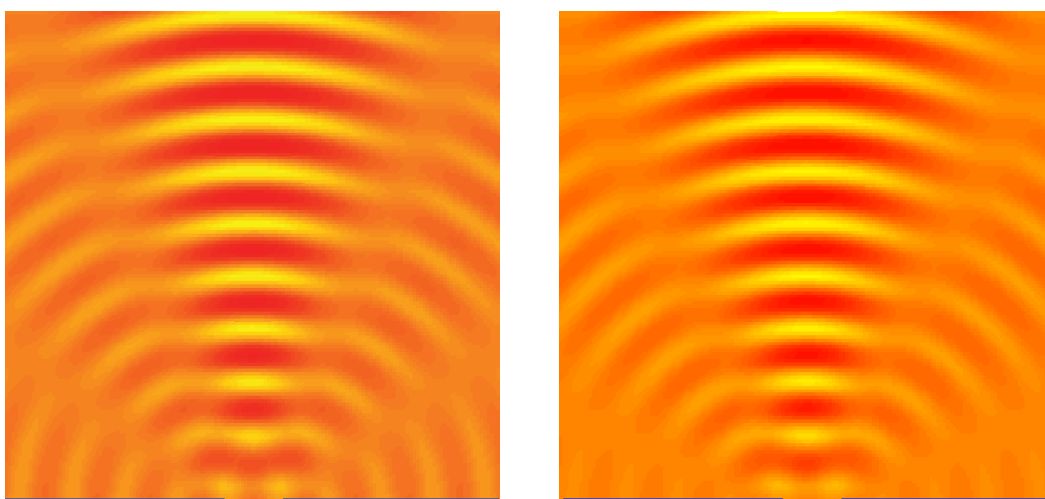


Abbildung 4.4.: *Huygensches Prinzip*. *Interferenzmuster* an einem Spalt. Links die Interferenz von 5 *Kreiswellen* auf einer horizontalen Linie im Spalt. Rechts das gleiche mit 9 *Kreiswellen*.

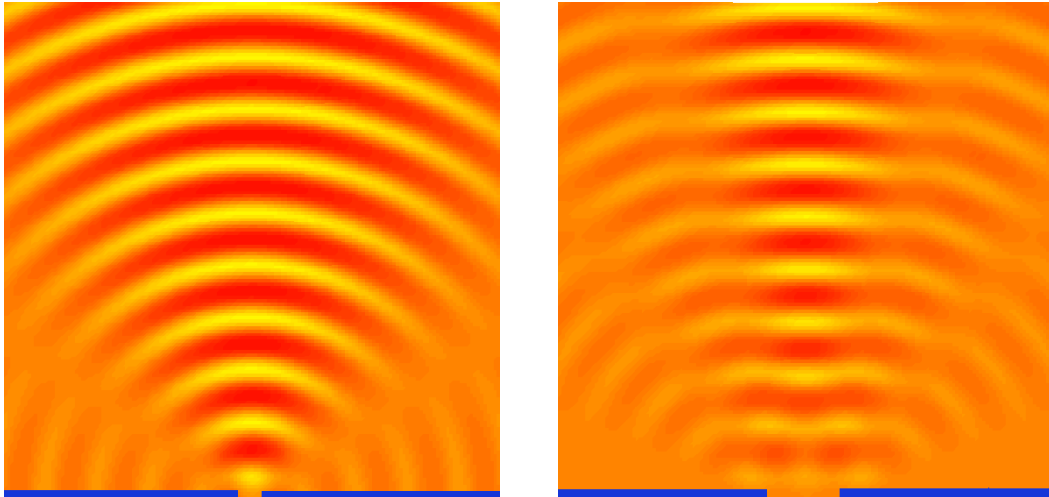


Abbildung 4.5.: *Huygenssches Prinzip. Interferenzmuster an einem Spalt.* Links das *Interferenzmuster* bei einer Spaltbreite von 1 Wellenlänge, rechts von 3 Wellenlängen.

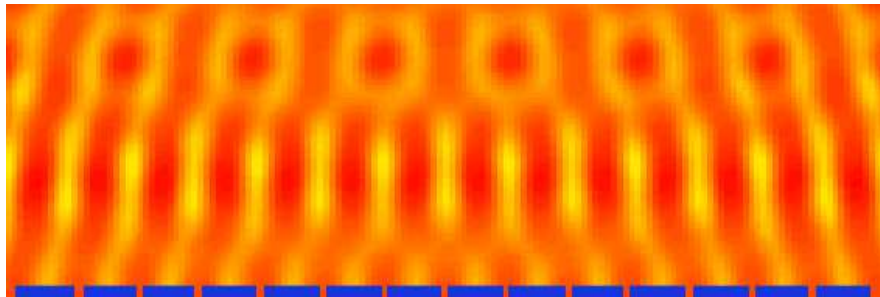


Abbildung 4.6.: *Huygenssches Prinzip. Interferenzmuster an einem Gitter.* Die im Bild sichtbare Drehung rührt daher, dass nur eine endliche Anzahl von Gitterschlitzen berücksichtigt wurde.

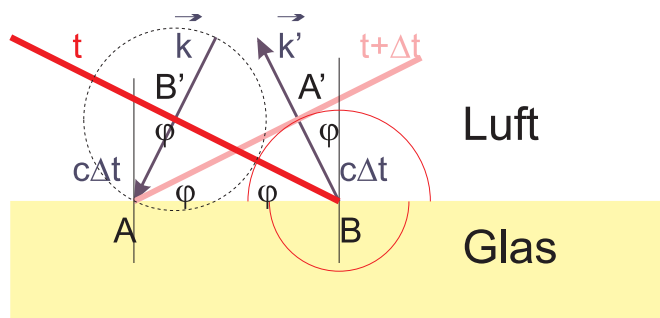


4.2. Reflexion

(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 153]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 20]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1030])



Versuch zur Vorlesung:
Optische Scheibe (Versuchskarte O-046)

Abbildung 4.7.: Geometrie der *Reflexion*

Wir betrachten eine Welle, die sich mit dem *Wellenvektor* \mathbf{k} sich auf die Grenzfläche Luft-Glas hin bewegt. Eingezeichnet ist rot der Wellenberg, der durch B' zur Zeit t geht. Dieser Wellenberg berührt die Grenzfläche in B . An beiden Orten wird eine Huygenssche *Elementarwelle* (Siehe Abschnitt 4.1) ausgelöst. nach der Zeit Δt hat der Wellenberg, der zur Zeit t durch B' ging, A erreicht. Nach dem Huygensschen Prinzip (Siehe Abschnitt 4.1) hat auch die in B' startende *Elementarwelle* A erreicht. Die *Elementarwelle* aus B ist nun bei A' . Da wir keine Annahme über Zeiten und Abstände gemacht haben, muss diese *Elementarwelle* Teil eines konstruktiv überlagernden Systems von Elementarwellen sein, die eine zweite ebene Welle mit dem *Wellenvektor* \mathbf{k}' erzeugen. Da die Ausbreitungsgeschwindigkeit für die beiden Elementarwellen gleich ist, da die Verbindungsstrecken $\overline{B'A}$ und $\overline{BA'}$ gleich lang sind und beide Teile eines rechtwinkligen Dreiecks sind, müssen alle Winkel gleich sein. Deshalb ist der Neigungswinkel von \mathbf{k}' zur Senkrechten gleich dem Neigungswinkel von \mathbf{k} zur Senkrechten. Es folgt das Reflexionsgesetz

Bei der *Reflexion* gilt:
Einfallswinkel=Ausfallswinkel

In einem Medium bewegt sich Licht langsamer: die Lichtwelle regt die gebundenen Elektronen zum Schwingen an. Diese erzeugen Huygenssche Elementarwellen (Siehe Abschnitt 4.1), aber mit einer Phasenverschiebung oder, in anderen Worten, einer Zeitverzögerung. Dies bedeutet, dass Licht sich langsamer ausbreitet. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht im Medium ist

$$c_m = \frac{c}{n} \quad (4.2.1)$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und n der *Brechungsindex* des Mediums ist¹. Die Brechzahl n gibt an, um wieviel langsamer Licht in einem Medium ist als im Vakuum. Die *Intensität* ist gegeben durch

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} E^2 = \frac{n\epsilon_0 c}{2} E^2 \quad (4.2.2)$$

¹Es ist auch $n = \sqrt{\epsilon}$, wobei ϵ die relative Dielektrizitätszahl bei der Frequenz des Lichtes ist

wenn E das elektrische Feld, d.h. die Amplitude der Lichtwelle ist. $\epsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12} \frac{AS}{Vm}$ ist die *Dielektrische Feldkonstante* und $c = 2.9979 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Der Vorfaktor $\frac{1}{2}$ kommt von der Mittelung über viele Wellen her. Gleichung (4.2.2) kann auch so geschrieben werden:

$$I = nE^2 \cdot 1.3272 \cdot 10^{-3} \frac{A}{V} \quad (4.2.3)$$

Bei senkrechtem Einfall ist die *Intensität* des reflektierten Lichtes (ohne Beweis)

$$I = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 I_0 \quad (4.2.4)$$

Dabei sind n_1 und n_2 die Brechzahlen der beiden Medien und I_0 die einfallende *Intensität*. Bei $n_1 = 1$ (Luft) und $n_2 = 1.33$ (Wasser) ist $I/I_0 = 0.02$. Für $n_2 = 1.5$ (Glas) ist $I/I_0 = 0.04$ und für $n_2 = 2.5$ (etwa Diamant) ist $I/I_0 = 0.18$. Bei $n_2 = 3.5$ ist $I/I_0 = 0.31$!

Bei zwei Medien mit unterschiedlichen Brechzahlen heisst dasjenige das **optisch dichtere Medium**, dessen Brechzahl grösser ist.



4.3. Brechung

(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 166]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 20]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1032])



Versuch zur Vorlesung:

Optische Scheibe (Versuchskarte O-046)

Da jede *Huygenssche Elementarwelle* eine periodische Schwingung mit einer gegebenen Frequenz ν darstellt, ändert sich die Frequenz beim Übergang von einem Medium in das zweite nicht. Da die Ausbreitungsgeschwindigkeit $c_m = c/n$ kleiner ist, gilt für die *Wellenlänge*

$$\lambda_m = \frac{c_m}{\nu} = \frac{c/n}{\nu} = \frac{\lambda}{n} \quad (4.3.1)$$

In einem Medium mit einer *Brechzahl* $n > 1$ ist die Wellenlänge kleiner. So hat rotes Licht $\lambda = 600$ nm in Glas die Wellenlänge $\lambda_m = 400$ nm.

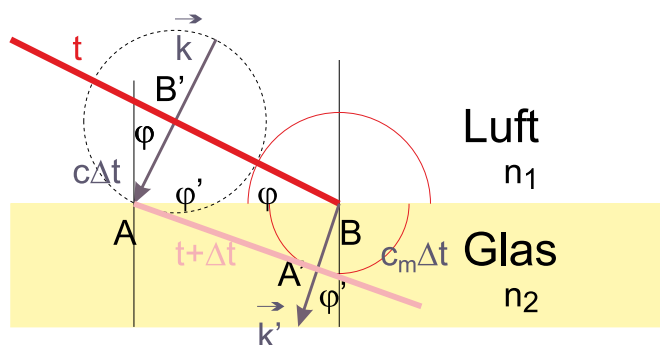


Abbildung 4.8.: Geometrie der Brechung

Wir betrachten nun den Weg, den das Licht im Inneren eines Mediums zurücklegt. Wir berücksichtigen, dass die Geschwindigkeit im Medium um den *Brechungsindex* n kleiner ist. Aus dem rechtwinkligen Dreieck wissen wir, dass

$$\begin{aligned}\overline{AB} \sin \phi &= \overline{AB'} \\ \overline{AB} \sin \phi' &= \overline{BA'}\end{aligned}\quad (4.3.2)$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}\overline{AB'} &= \frac{c\Delta t}{n_1} \\ \overline{BA'} &= \frac{c\Delta t}{n_2}\end{aligned}\quad (4.3.3)$$

Also gilt

$$\frac{c\Delta t}{n_1 \sin \phi} = \frac{c\Delta t}{n_2 \sin \phi'}\quad (4.3.4)$$

Wir kürzen mit $c\Delta t$ und setzen $\phi = \phi_1$ und $\phi' = \phi_2$ und erhalten das **Snelliussche Brechungsgesetz**.

Brechungsgesetz

$$n_1 \sin \phi_1 = n_2 \sin \phi_2\quad (4.3.5)$$

Bei diesem Gesetz gibt es nur dann immer eine Lösung, wenn $n_1 \leq n_2$ ist. Sonst gibt es den Winkel der *Totalreflexion*. Wenn der vom optisch dichteren Medium einfallende Lichtstrahl gegen die Grenzflächennormale den Winkel ϕ_{tot} hat und der Winkel des resultierenden Lichtstrahls gegen die Grenzflächennormale im optisch dünneren Medium $\pi/2$ ist, hat das Brechungsgesetz gerade noch eine reelle Lösung.

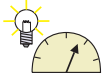
$$\phi_{tot} = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right) \quad \text{mit } n_1 < n_2\quad (4.3.6)$$

Für Winkel, die grösser als ϕ_{tot} sind, wird Licht aus dem optisch dünneren Medium total reflektiert. Die *Reflexion* geschieht in einer Tiefe von etwa $100nm$ innerhalb des optisch dünneren Mediums.

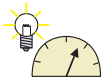


4.3.1. Totalreflexion

(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 191]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 21]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1035]) (Siehe Gerthsen, Physik [Mes06, pp. 485])



Versuch zur Vorlesung:
Brechung und Reflexion (Versuchskarte O-068)



Versuch zur Vorlesung:
Wasserstrahl als Lichtleiter (Versuchskarte O-072)

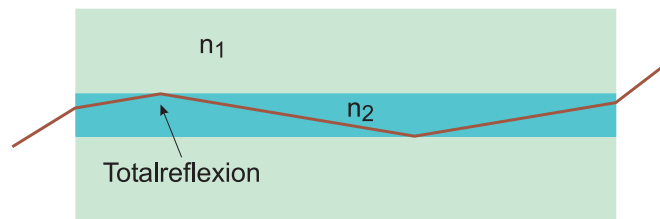


Abbildung 4.9.: Transport von Licht in einer Stufenindexfaser

Wenn Licht mit einem Winkel nahe der Achse der optischen Faser in diese eingekoppelt wird, dann wird das Licht mit *Totalreflexion* transportiert. Nur Licht, das innerhalb des Akzeptanzwinkels den Faserkern trifft, wird weiter transportiert. Wenn die Faser gekrümmt wird, dann verlässt ein Teil des Lichtes die Faser: Krümmungen in der Faser erhöhen die Verluste.

Wenn der Faserkern den Durchmesser d hat, ist der effektive Weg vom Winkel α gegen die Achse abhängig. Die Hypotenuse ist $\ell_H = d / \sin \alpha$ lang, der direkte Weg wäre $\ell = d / \tan \alpha$. Die relative Längenänderung ist

$$\frac{\ell_H}{\ell} = \frac{d}{\sin \alpha} \frac{\tan \alpha}{d} = \frac{\sin \alpha}{\tan \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} \approx 1 + \frac{1}{2} \alpha^2 \quad (4.3.7)$$

Die Laufzeit hängt also davon ab, wie das Licht durch eine Glasfaser läuft. Zusätzlich tritt Dispersion (Siehe Abschnitt 3.6) auf. bei allen Gläsern ist

$$n_{blau} > n_{grün} > n_{gelb} > n_{rot} \quad (4.3.8)$$

Deshalb ist die Laufzeit für die verschiedenen Farben auch unterschiedlich. Da $c_{Medium} = c / n_{Medium}$ ist ist auch

$$c_{blau} < c_{grün} < c_{gelb} < c_{rot} \quad (4.3.9)$$

4.4. Das Fermatsche Prinzip



(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 166]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 13]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1042])

Eine alternative Art, die Ausbreitung von Licht zu beschreiben, ist das *Fermatsche Prinzip*.

Der Weg, den das Licht nimmt, um von einem Punkt zu einem anderen zu gelangen, ist stets so, dass die benötigte Zeit minimal ist.

Die genauere Formulierung lautet:

Der Weg, den das Licht nimmt, um von einem Punkt zu einem anderen zu gelangen, ist stets so, dass die Zeit, die das Licht benötigt, invariant gegen kleine Änderungen des Weges ist.

Mathematisch lautet das Fermatsche Prinzip: Die Zeit

$$t = \int_{s_1}^{s_2} \frac{n(s)}{c} ds = \frac{1}{c} \int_{s_1}^{s_2} n(s) ds \quad (4.4.1)$$

hat für jeden realisierten Lichtweg bezüglich einer Variation des Weges einen Extremalwert. Bei zwei- oder mehrmals stetig differenzierbaren Funktionen folgt auch der strengere Satz.

Wenn man den Weg nicht kennt, kann man Testfunktionen $s(\mathbf{r})$ verwenden. Diejenige, die die kürzeste Zeit ergibt, ist die wahrscheinlichste.

4.4.1. Reflexion



(Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1042])

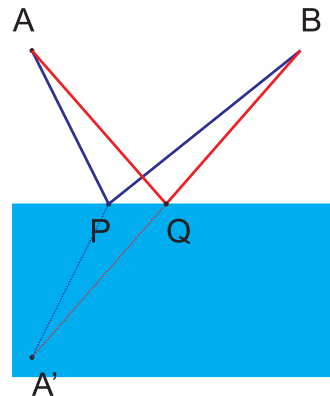


Abbildung 4.10.: Begründung des Reflexionsgesetzes mit dem *Fermatschen Prinzip*

Ein Beispiel für das Fermatsche Prinzip ist die *Reflexion*. In der obigen Zeichnung ist A' das an der Grenzfläche gespiegelte Bild von A . In dem Dreieck $A'BP$ ist die Summe der Seitenlängen $A'P$ und PB grösser als die Seitenlänge $A'B$. Da die Konstruktion mit A' eine Hilfskonstruktion ist und wir überall die gleiche Ausbreitungsgeschwindigkeit c haben, ist die direkte Verbindung $A'B$ die kürzeste Strecke zwischen den beiden Punkten. Damit ist aber das Gesetz **Einfallswinkel = Ausfallswinkel** gezeigt.



4.4.2. Brechung

(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 166]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1043])

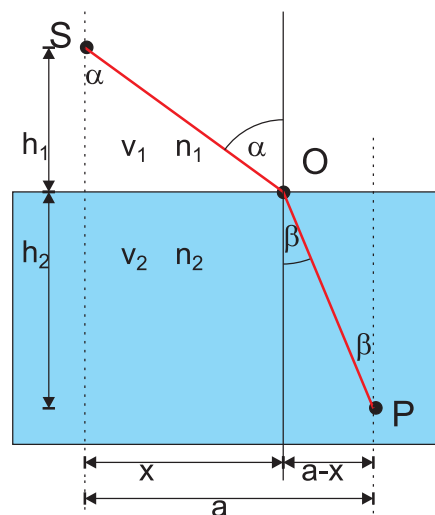


Abbildung 4.11.: Anwendung des Fermatschen Prinzips auf die Berechnung des *Brechungsgesetzes*

Zur Berechnung des Brechungsgesetzes nehmen wir an, dass das Licht von S (ge-

geben) über 0 (verschiebbar, Koordinate x) nach P (gegeben) sich ausbreitet. Die Zeit, um von S nach P ist

$$t_{SP} = t_{S0} + t_{0P} \quad (4.4.2)$$

Diese Zeit soll extremal sein, das heisst

$$\frac{\partial t_{SP}}{\partial x} = 0 \quad (4.4.3)$$

Nun ist

$$t_{SP} = \frac{\overline{S0}}{v_1} + \frac{\overline{0P}}{v_2} \quad (4.4.4)$$

Nach der obigen Skizze ist

$$\begin{aligned} \overline{S0} &= \sqrt{x^2 + h_1^2} \\ \overline{0P} &= \sqrt{(a-x)^2 + h_2^2} \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

Also ist

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial t_{SP}}{\partial x} = \frac{1}{2v_1} \frac{1}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} \cdot 2x - \frac{1}{2v_2} \frac{1}{\sqrt{(a-x)^2 + h_2^2}} \cdot 2(a-x) \\ &= \frac{x}{v_1 \sqrt{x^2 + h_1^2}} - \frac{(a-x)}{v_2 \sqrt{(a-x)^2 + h_2^2}} \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

Die Betrachtung der in der Skizze auftretenden Dreiecke zeigt, dass

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} \\ \sin \beta &= \frac{(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2 + h_2^2}} \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

ist. Mit $v_1 = c/n_1$ und $v_2 = c/n_2$ erhalten wir das *Brechungsgesetz* nach *Snellius*

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \quad (4.4.8)$$

4.4.3. Das Fermatsche Prinzip und die Interferenz



(Siehe Känzig, Mechanik und Wellenlehre [Kän78, pp. 253])

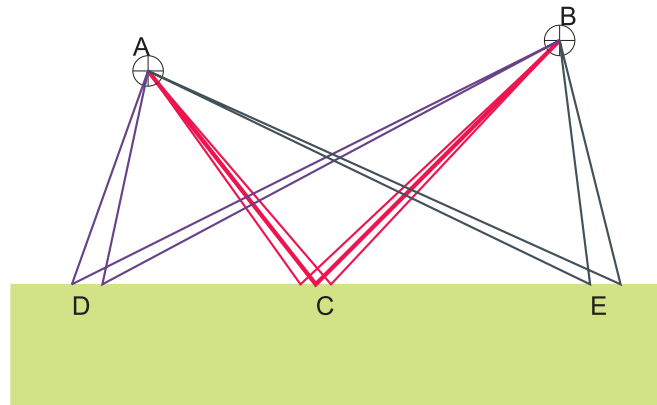


Abbildung 4.12.: Der kürzeste Weg \overline{ACB} und nahe benachbarte Wege haben fast gleiche Längen. Im Gegensatz dazu ändert sich bei den längeren Wegen \overline{ADB} und \overline{AEB} die Länge schnell.

Vom Punkte A soll Licht zum Punkte C gelangen. Es gibt viele mögliche Wege. nach dem Fermatschen Prinzip folgt Licht dem Weg, der sich am wenigsten in der optischen Länge² von seinen benachbarten Wegen unterscheidet. Wenn die Weglängenfunktion stetig differenzierbar ist, ist dies auch der kürzeste Weg. Wir berechnen nun die Phase einer Welle, die entlang eines beliebigen Weges sich ausbreitet, wobei w ein Parameter ist, der die möglichen Wege beschreibt.

Man nimmt an, dass alle Amplituden gleich sind und erhält

$$\begin{aligned} A_B(t) &= \sum_{\text{alle Wege } j} A e^{i(ks_j - \omega t)} \\ &= A e^{-i\omega t} \sum_{\text{alle Wege } j} e^{iks_j} \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

Die verbleibende Summation wird auf graphischem Wege in der komplexen Ebene durchgeführt. Die im Punkte B beobachtete *Intensität* ist das **Resultat der Interferenz aller möglichen Wege**.

²Das ist die Länge, die mit dem *Brechungsindex* gewichtet ist.

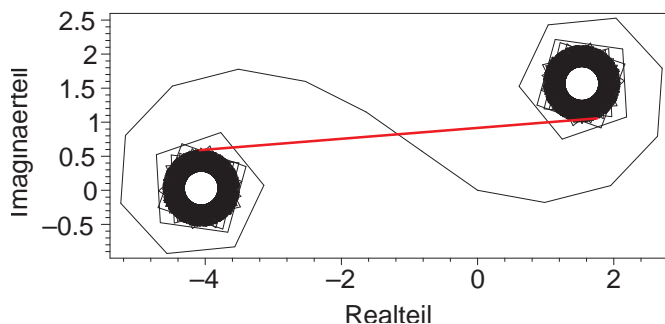


Abbildung 4.13.: Diese Darstellung zeigt grafisch die Summenbildung zur Berechnung der Interferenz für alle möglichen Wege. Die einzelnen Amplituden werden aufsummiert. Rot ist das Resultat dargestellt.

In dieser Abbildung tragen nur die Wege in der Nähe des kürzesten Weges zur konstruktiven Interferenz bei. Nur dort ist die Ableitung der Weglänge gegen den Parameter w null: Alle Summanden interferieren konstruktiv. Die Wege über D und E ändern die Länge schnell mit w . Sie bilden die beiden Spiralen auf der linken und auf der rechten Seite und tragen nichts zur Summe bei. Wir können das Fermatsche Prinzip auch so formulieren:

Die *Intensität* des Lichtes in B ausgehend von der Quelle A ist gegeben durch die Interferenz der Lichtstrahlen auf allen möglichen Wegen. Dabei interferieren alle Lichtstrahlen destruktiv, mit Ausnahme derjenigen, die wir bei der Lichtausbreitung beobachten.

In der Quantenelektrodynamik werden Prozesse durch das Aufsummieren aller möglichen Feynmanschen Diagramme berechnet. Nur wenige Diagramme tragen zum Resultat wesentliches bei, die anderen sind Korrekturen höherer Ordnung. Die Summe Feynmanschen Diagramme ist nichts anderes als das Fermatsche Prinzip angewandt auf die Quantenelektrodynamik.

4.5. Polarisation

(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 475]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1044])

Versuch zur Vorlesung: [Polarisiertes Licht: Polarisator und Analysator](#)

Licht ist eine transversale elektromagnetische Welle. Das heisst, dass das elek-



trische und das magnetische Feld senkrecht zur Ausbreitungsrichtung schwingen. Die Wellengleichung für das elektrische Feld und damit auch für Licht ist durch $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{x}) \cos(\mathbf{k}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} - \omega t)$ gegeben. Die Tatsache, dass wir eine Transversalwelle haben erfordert, dass \mathbf{E}_0 der Bedingung

$$\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k} = 0 \tag{4.5.1}$$

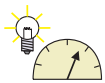
gilt.

Wenn wir nun, ohne Einschränkung der Allgemeinheit, die Ausbreitungsrichtung der Welle in die x-Richtung legen, dann sind

- der Wellenvektor $\mathbf{k} = (k; 0; 0)$
- und die Amplitude $\mathbf{E}_0 = (0; E_y; E_z)$

Diese Wahl erfüllt die Bedingung der Transversalität.

Es gibt zwei mögliche orthogonale Orientierungen von \mathbf{E}_0 sowie die daraus folgenden Linearkombinationen. Die Richtung, in die \mathbf{E}_0 zeigt ist die **Polarisationsrichtung**.



4.5.1. Polarisation durch Absorption (*Dichroismus*)

(Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 323]) (Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 487]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1044])

Versuch zur Vorlesung: [Polarisiertes Licht: Polarisator und Analysator](#)

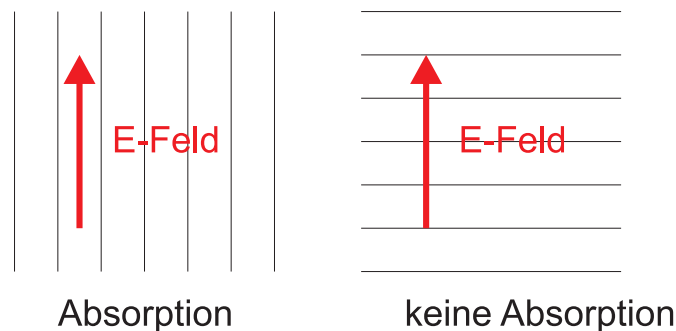


Abbildung 4.14.: Polarisation durch Absorption in einem Drahtpolarisator

Wenn das elektrische Feld einer Mikrowellen entlang eines Drahtes zeigt, kann dieses Feld im Draht Ladungen bewegen und so Energie abgeben. Die *Intensität* der Welle und damit die die Absorption hängen von der **Polarisation** ab.

Ebenso gibt es Moleküle mit Doppelbindungen zwischen den Kohlenstoffatomen, bei denen π -Elektronen beweglich sind, die wie Drähte wirken. Werden diese Moleküle orientiert zu einer Folie gemacht, so erhält man eine polarisierende Folie.

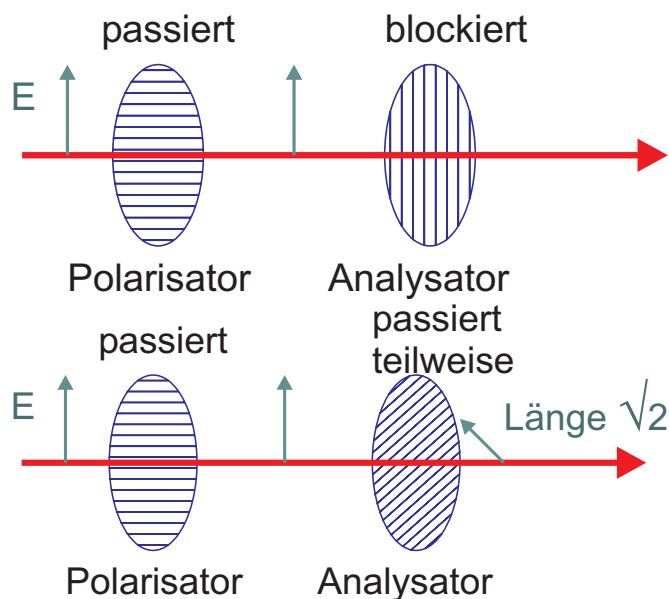


Abbildung 4.15.: Licht durch einen *Polarisator* und einen *Analysator* mit gekreuzten Polarisationsrichtungen. Darunter die gleiche Anordnung, aber der *Analysator* ist nun um $\pi/4$ gedreht.

Bei einer Anordnung von *Analysator* und *Polarisator* polarisiert der *Polarisator* das Licht. Der *Analysator* lässt nur die Projektion des \mathbf{E} -Feldes auf seine Durchlassachse durch. Für die *Amplitude* gilt

$$E = E_0 \cos \theta \quad (4.5.2)$$

wobei θ der Winkel zwischen den Polarisationsrichtungen von *Polarisator* und *Analysator* ist. Da die *Intensität* durch $I = \frac{n\epsilon_0 c}{2} E^2$ ist und somit proportional zum Quadrat der *Amplitude* $I \propto E^2$, gilt für die *Intensität*

$$I = I_0 \cos^2 \theta \quad (4.5.3)$$

(Gesetz von Malus). Wenn zwischen gekreuzten Polarisatoren und Analysatoren eine optisch aktive Substanz eingebracht wird, kann mit dieser Anordnung die Grösse der optischen Aktivität gemessen werden³.

³Die Analyse von Spannungen in Bauteilen nachgebildet mit Plexiglas war eine wichtige Anwendung (heute gibt es Programme zur Finite-Elemente-Analyse)

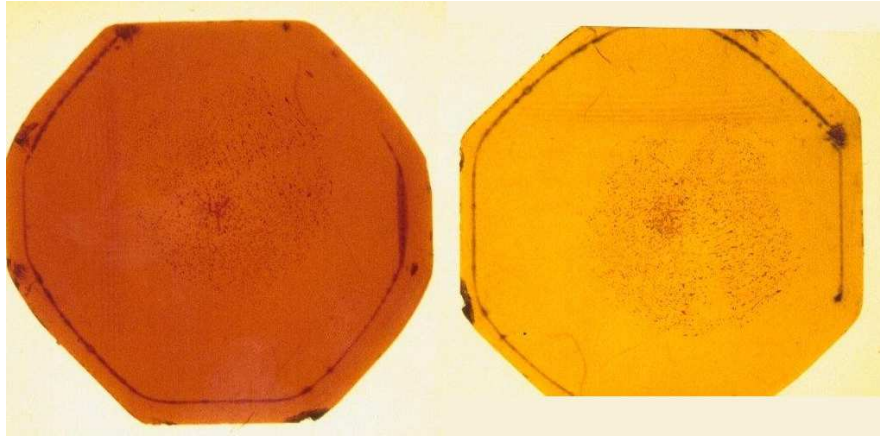
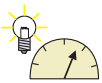


Abbildung 4.16.: Dichroismus in einem NaVO_4Mn -Kristall (gezüchtet von A. Lentz, fotografiert von M. Pietralla).



4.5.2. Polarisation durch Streuung

(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 507]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1046])



Versuch zur Vorlesung:
Sonnenuntergang (Versuchskarte O-042)

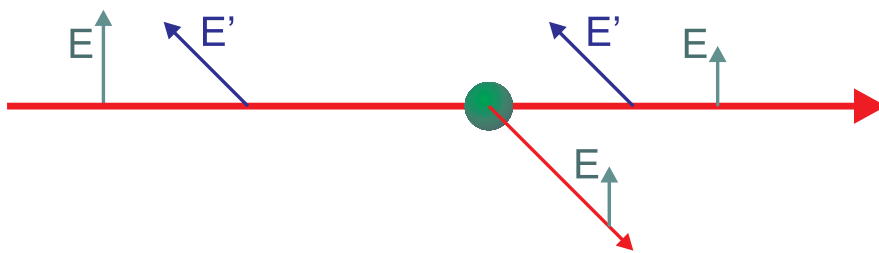


Abbildung 4.17.: Polarisation durch Streuung an einem Teilchen

Wenn Licht von links auf ein streuendes Teilchen (z.B. ein Wassertröpfchen) fällt, dann kann nur die Komponente des \mathbf{E} -Feldes, die auch senkrecht zur Streurichtung steht, eine Lichtwelle anregen. Die dazu senkrechte Komponente würde eine propagierende, longitudinale polarisierte Welle erzeugen. Propagierende, longitudinale Lichtwellen stehen aber im Widerspruch zu den Maxwellschen Gleichungen und treten deshalb nicht auf.

4.5.3. Polarisation durch Reflexion

(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 509]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 320]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1047])



Versuch zur Vorlesung:

Spiegelanalysator (Versuchskarte O-115)

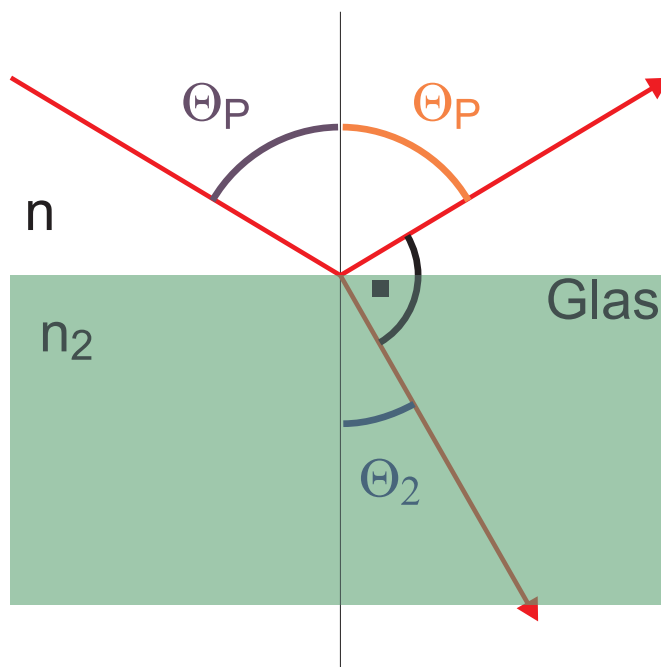


Abbildung 4.18.: Winkel bei der Reflexion unter dem Brewster-Winkel.

Wenn Licht in ein dichteres Medium eindringt und es zur Reflexion (Siehe Abschnitt 4.2) und zur Brechung kommt gelten zwei Gesetze

- Einfallswinkel = Ausfallswinkel (Impulserhaltung für die zur Grenzfläche tangentielle Komponenten des Lichtes)
- Das Gesetz von Snellius $n \sin \theta_P = n_2 \sin \theta_2$

Wenn nun der Winkel zwischen dem gebrochenen Licht und dem reflektierten Licht $\pi/2$ ist, haben wir wieder die Situation wie bei der Streuung: im reflektierten Licht kann keine Lichtwelle angeregt werden, deren Polarisationsrichtung (\mathbf{E} !) in der durch den einfallenden und gebrochenen Lichtstrahl definierten *Einfallsebene* liegt. Das heisst, der reflektierte Strahl ist vollkommen polarisiert mit der Polarisationsrichtung senkrecht zur *Einfallsebene*. Der Winkel θ_P heisst nach seinem Entdecker *Brewster-Winkel*. Eine Betrachtung der Winkel in der Abbildung ergibt, dass $\theta_P + \theta_2 = \pi/2$ ist. Damit wird der *Brewster-Winkel*

$$n \sin \theta_P = n_2 \sin \theta_2 = n_2 \sin(\pi/2 - \theta_P) = n_2 \cos \theta_P \quad (4.5.4)$$

und damit

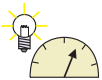
$$\tan \theta_P = \frac{n_2}{n} \tag{4.5.5}$$

Für Glas ($n_2 = 1.5$) gegen Luft ($n = 1$) ist $\theta_P = \arctan(1.5) = 0.3128\pi = 56.31^\circ$. Der *Brewster-Winkel* wird zum Beispiel beim Resonator von Gaslasern angewandt um die Polarisationsrichtung zu definieren.



4.5.4. Polarisation durch Doppelbrechung

(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 492]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 322]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1048])



Versuch zur Vorlesung:
 Doppelbrechung (Versuchskarte O-005)

Viele Materialien haben isotrope optische Eigenschaften. Analog zu den elastomechanischen Eigenschaften von isotropen Materialien, die durch den Elastizitätsmodul E beschrieben werden, werden isotrope optische Materialien durch eine Brechzahl $n = \varepsilon^2$ beschrieben. Die mechanischen Eigenschaften anisotroper Materialien werden durch Tensoren beschrieben. Analog werden optische Eigenschaften anisotroper Medien durch Tensoren ε oder n beschrieben. Die Mathematik sagt, dass solche Tensoren in einem Hauptachsensystem Nur Komponenten auf ihrer Hauptdiagonalen haben. Für den *Brechungsindex* heisst dies, dass nicht einer, n sondern drei Indizes n_1 , n_2 und n_3 angegeben werden müssen.

Material	Anwendung
Kalkspat	<i>Differenz-Interferenz-Kontrast-Objektive</i>
Quarz	Anzeigen ...
Flüssigkristalle	Spannungsuntersuchung
Plexiglas unter mechanischer Spannung	
usw.	

Tabelle 4.1.: Doppelbrechende Materialien

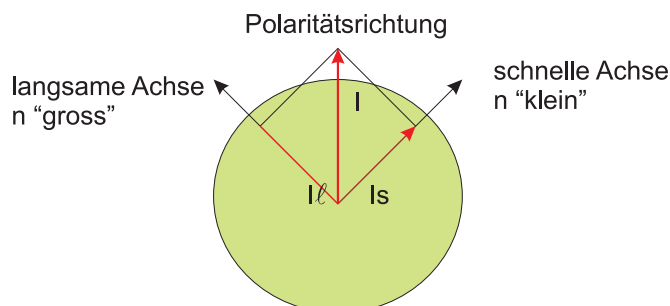


Abbildung 4.19.: Wirkungsweise eines $\lambda/4$ -Plättchens oder eines $\lambda/2$ -Plättchens

Bei einem $\lambda/4$ - oder einem $\lambda/2$ -Plättchen wird die Polarisationsrichtung des einfallenden Lichtes so gewählt, dass sie $\pi/4$ zu den beiden Hauptachsen mit $n_{\text{schnell}} < n_{\text{langsam}}$ ist. Dann wird **die eine Welle** wie in der unten stehenden Zeichnung gezeigt, langsamer propagiert als **die andere (die rote)**. Es entsteht eine Phasenverschiebung, die bei $\lambda/4$ -Plättchen gerade eine viertel Wellenlänge ausmacht. Das Licht ist dann zirkular polarisiert.

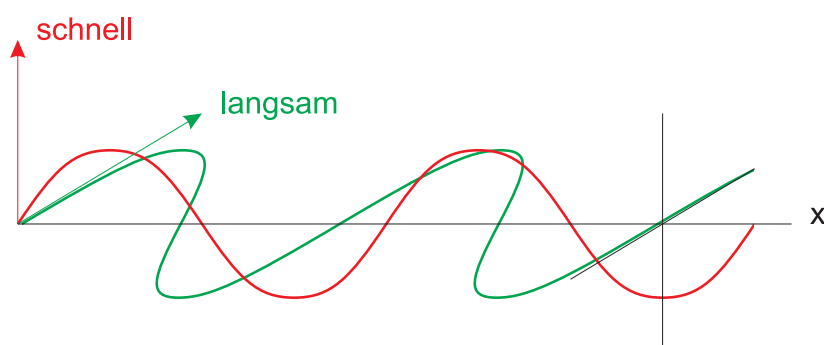


Abbildung 4.20.: Wellen in einem $\lambda/4$ -Plättchen

Ist der Gangunterschied $\lambda/2$, wie in der oben stehenden Zeichnung, dann wird die Polarisationsrichtung um $\pi/2$ gedreht.

Wir beschreiben kohärentes Licht durch die Gleichung

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t - \phi)} \quad (4.5.6)$$

wobei $\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k} = 0$ ist (Transversalität) und \mathbf{E}_0 die Polarisationsrichtung angibt. ϕ ist die Phase, die die Anfangsbedingung am Ort 0 und zur Zeit 0 angibt.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir $\mathbf{k} = (k; 0; 0)$ setzen. Dann ist $\mathbf{E}_0 = (0; E_y; E_z)$ die möglichen Polarisationsrichtungen. Der Vektor des elektrischen Feldes hat also nur Komponenten in die y - und die z -Richtung.

Unser dichroitische Plättchen habe die schnelle Achse (*Brechungsindex* n_1) entlang y' und die langsame Achse (*Brechungsindex* n_2) entlang z' und die Dicke ℓ . Die x -Achse sollen übereinstimmen. Das gestrichene Koordinatensystem sei um den Winkel α gegen das ungestrichene verdreht. Dann ist

$$\begin{aligned}x' &= x \\y' &= y \cos(\alpha) - z \sin(\alpha) \\z' &= y \sin(\alpha) + z \cos(\alpha)\end{aligned}\tag{4.5.7}$$

Für Licht mit einer beliebigen Polarisation und einer Ausbreitung entlang der x -Achse muss das elektrische Feld auf das gestrichene Koordinatensystem projiziert werden. Am Anfang des Plättchens sei zudem die Phase $\phi = 0$. Wir bekommen dann

$$\begin{aligned}E_{y'} &= E_y \cos \alpha - E_z \sin \alpha \\E_{z'} &= E_y \sin \alpha + E_z \cos \alpha\end{aligned}\tag{4.5.8}$$

Die Feldkomponente mit der Polarisation $E_{y'}$ breitet sich mit der Geschwindigkeit $c_1 = c/n_1$ aus, die Polarisation $E_{z'}$ mit der Geschwindigkeit $c_2 = c/n_2$. Damit sind die Wellenlängen der Polarisation entlang y' $\lambda_1 = \lambda/n_1 = \frac{2\pi}{kn_1} = \frac{2\pi}{k_1}$ und entlang z' $\lambda_2 = \lambda/n_2 = \frac{2\pi}{kn_2} = \frac{2\pi}{k_2}$. Für die \mathbf{k} gilt dann

$$\begin{aligned}k_1 &= n_1 k \\k_2 &= n_2 k\end{aligned}\tag{4.5.9}$$

Die Laufzeit durch ein Plättchen der Dicke ℓ ist dann $t_1 = \ell/c_1 = \ell n_1/c$ und $t_2 = \ell/c_2 = \ell n_2/c$. Wir betrachten zu einer feststehenden Zeit (praktischerweise $t = 0$) das Wellenmuster. Am Ausgang des Plättchens haben wir

$$\begin{aligned}E_{y'}(\ell, 0) &= E_{y'} e^{ik_1 \ell} = E_{y'} e^{in_1 k \ell} \\E_{z'}(\ell, 0) &= E_{z'} e^{ik_2 \ell} = E_{z'} e^{in_2 k \ell}\end{aligned}\tag{4.5.10}$$

Der Phasenunterschied der beiden Wellen ist die Differenz der Argumente der Exponentialfunktion, also $\phi(\ell)(n_2 - n_1)k\ell$. Wir können also auch schreiben

$$\begin{aligned}E_{y'}(\ell, 0) &= E_{y'} e^{in_1 k \ell} \\E_{z'}(\ell, 0) &= E_{z'} e^{in_1 k \ell} e^{i\phi(\ell)}\end{aligned}\tag{4.5.11}$$

Wenn wir den gemeinsamen Faktor abspalten, dann wird die z' -Komponente gegen der y' -Komponente um $\phi(\ell)$ phasenverschoben. Diese neuen Polarisationen müssen wir auf das x, y, z -Koordinatensystem mit

$$\begin{aligned}x &= x' \\y &= y' \cos(\alpha) + z' \sin(\alpha) \\z &= -y' \sin(\alpha) + z' \cos(\alpha)\end{aligned}\tag{4.5.12}$$

projizieren. Damit ist

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} E_y(\ell) \\ E_z(\ell) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{y'}(\ell) \\ E_{z'}(\ell) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{y'} \\ E_{z'} e^{i\phi(\ell)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\phi(\ell)/2} & 0 \\ 0 & -e^{i\phi(\ell)/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{y'} \\ E_{z'} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\phi(\ell)/2} & 0 \\ 0 & -e^{i\phi(\ell)/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_y \\ E_z \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.5.13}$$

Ausmultipliziert erhält man für die Matrix

$$\begin{pmatrix} e^{i\phi(\ell)/2} \cos^2 \alpha + e^{-i\phi(\ell)/2} \sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha (e^{i\phi(\ell)/2} - e^{-i\phi(\ell)/2}) \\ \sin \alpha \cos \alpha (e^{i\phi(\ell)/2} - e^{-i\phi(\ell)/2}) & e^{i\phi(\ell)/2} \sin^2 \alpha + e^{-i\phi(\ell)/2} \cos^2 \alpha \end{pmatrix} \tag{4.5.14}$$

oder (nur für die Matrix)

$$\begin{pmatrix} e^{i\phi(\ell)/2} \frac{1+\cos 2\alpha}{2} + e^{-i\phi(\ell)/2} \frac{1-\cos 2\alpha}{2} & \frac{\sin 2\alpha}{2} (e^{i\phi(\ell)/2} - e^{-i\phi(\ell)/2}) \\ \frac{\sin 2\alpha}{2} (e^{i\phi(\ell)/2} - e^{-i\phi(\ell)/2}) & e^{i\phi(\ell)/2} \frac{1-\cos 2\alpha}{2} + e^{-i\phi(\ell)/2} \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \end{pmatrix} \tag{4.5.15}$$

Wir vereinfachen und erhalten die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{e^{i\phi(\ell)/2} + e^{-i\phi(\ell)/2}}{2} + i \cos 2\alpha \frac{e^{i\phi(\ell)/2} - e^{-i\phi(\ell)/2}}{2i} & \frac{i \sin 2\alpha (e^{i\phi(\ell)/2} - e^{-i\phi(\ell)/2})}{2i} \\ i \sin 2\alpha \frac{e^{i\phi(\ell)/2} - e^{-i\phi(\ell)/2}}{2i} & \frac{e^{i\phi(\ell)/2} + e^{-i\phi(\ell)/2}}{2} - i \cos 2\alpha \frac{e^{i\phi(\ell)/2} - e^{-i\phi(\ell)/2}}{2i} \end{pmatrix} \tag{4.5.16}$$

und erhalten

$$\begin{pmatrix} E_y(\ell) \\ E_z(\ell) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi(\ell)/2) + i \cos 2\alpha \sin(\phi(\ell)/2) & i \sin 2\alpha \sin(\phi(\ell)/2) \\ i \sin 2\alpha \sin(\phi(\ell)/2) & \cos(\phi(\ell)/2) - i \cos 2\alpha \sin(\phi(\ell)/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_y \\ E_z \end{pmatrix} \tag{4.5.17}$$

Wir betrachten nun den Spezialfall, dass $\alpha = \pi/4$ und $\phi(\ell) = \pi/2$ ist. Die obige Matrix wird dann

$$\begin{pmatrix} E_y(\ell) \\ E_z(\ell) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_y \\ E_z \end{pmatrix} \tag{4.5.18}$$

oder

$$\begin{pmatrix} E_y(\ell) \\ E_z(\ell) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_y \\ E_z \end{pmatrix} \tag{4.5.19}$$

Eine Lichtwelle, die nur in y -Richtung polarisiert ist, wird zu einer Welle, die sowohl in die y wie auch in die z -Richtung polarisiert ist, aber mit einem Phasenfaktor von $\pi/2$. Die Wellengleichung ist dann

$$\begin{aligned} E_y(x, t) &= E_y \cos(kx - \omega t) \\ E_z(x, t) &= E_z \cos(kx - \omega t - \pi/2) = E_z \sin(kx - \pi/2) \end{aligned} \quad (4.5.20)$$

Diese Art Wellen heisst *zirkular polarisierte Welle*. Es gibt zwei Arten, mit rechtsläufigem und linksläufigem Drehsinn. Ein dichroitische Objekt, dass die obigen Eigenschaften hat, heisst $\lambda/4$ -Plättchen.

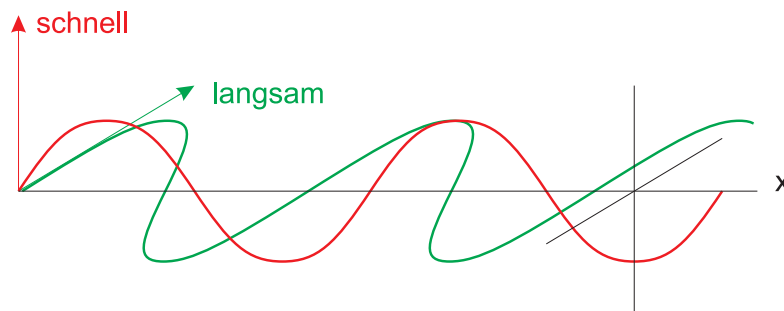


Abbildung 4.21.: Wellen in einem $\lambda/2$ -Plättchen

Der zweite wichtige Spezialfall ist $\alpha = \pi/4$ und $\phi(\ell) = \pi$. Die obige Matrix wird dann

$$\begin{pmatrix} E_y(\ell) \\ E_z(\ell) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (4.5.21)$$

Licht mit einer Polarisationsrichtung in y -Richtung wird in Licht mit einer Polarisationsrichtung z überführt. Eine solche Anordnung heisst $\lambda/2$ -Plättchen. Zwei $\lambda/4$ -Plättchen hintereinander geschaltet haben die gleiche Wirkung. Anwendung: optisches Lesesystem in CDs.



4.5.5. Beschreibung der Polarisation durch Jones-Vektoren und Jones-Matrizen

(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 544])

Die Änderung der Polarisation von kohärentem Licht beim Durchgang durch Polarisatoren oder doppelbrechende Materialien kann mit Jones-Vektoren und Jones-Matrizen beschrieben werden. Jones-Vektoren und Jones-Matrizen sind eine Verallgemeinerung der obigen Rechnung. Formal läuft dies darauf hinaus, dass wir den Ausgangszustand als Vektor beschreiben und auf ihn die Operatoren der polarisationsändernden Objekte anwenden.

Aus der Darstellung im vorhergehenden Kapitel geht hervor, dass nur die y - und die z -Richtung die Polarisation beschreiben. Wir können also Zweivektoren verwenden. Weiter soll die Phase der Welle als komplexe Zahl dargestellt werden.

Schliesslich normieren wir die Länge des Vektors auf 1. Eine Welle polarisiert in die y -Richtung wird also durch den Vektor

$$\mathbf{P}_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.5.22)$$

dargestellt. Rechtszirkular polarisiertes Licht wird durch

$$\mathbf{P}_{\mathcal{R}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad (4.5.23)$$

beschrieben.

Jones-Vektoren	Beschreibung
$\mathbf{A}_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	Linear polarisiert in y -Richtung
$\mathbf{A}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	Linear polarisiert in z -Richtung
$\mathbf{A}_{\mathcal{R}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$	Rechtshändig zirkular polarisiert
$\mathbf{A}_{\mathcal{L}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$	Linkshändig zirkular polarisiert

Polarisationen in andere Richtungen können durch die Anwendung von Drehmatrizen berechnet werden. Die Drehung aus dem Koordinatensystem y, z nach y', z' wird durch

$$\begin{aligned} y' &= y \cos(\alpha) - z \sin(\alpha) \\ z' &= y \sin(\alpha) + z \cos(\alpha) \end{aligned} \quad (4.5.24)$$

beschrieben. Die Drehmatrix lautet also

$$\mathbf{R}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad (4.5.25)$$

Ein um den Winkel α zu y -Achse linear polarisierter Strahl wird durch

$$\mathbf{A}(\alpha) = \mathbf{R}(\alpha)\mathbf{A}_y = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} \quad (4.5.26)$$

beschrieben. Ein linearer Polarisator in y -Richtung wird durch

$$\mathbf{P}_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.5.27)$$

beschrieben. Die Wirkung eines um den Winkel α gedrehten Polarisators kann berechnet man, indem man das Koordinatensystem um $-\alpha$ dreht, den Polarisator in der y -Ebene anwendet und mit α zurückdreht.

$$\mathbf{P}(\alpha) = \mathbf{R}(\alpha)\mathbf{P}_y\mathbf{R}(-\alpha) \quad (4.5.28)$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) & \cos(\alpha)\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha)\sin(\alpha) & \sin^2(\alpha) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.5.29)$$

Die Jones-Matrix des linearen Polarisators in die z -Richtung lautet also

$$\mathbf{P}_z = \mathbf{P}(\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die zirkulare Polarisation wird durch die beiden homogenen Polarisatoren $\mathbf{P}_{\mathcal{R}}$ und $\mathbf{P}_{\mathcal{L}}$ erzeugt.

$$\mathbf{P}_{\mathcal{R}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \quad (4.5.30)$$

$$\mathbf{P}_{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

Das $\lambda/4$ mit der schnellen Achse entlang der y -Richtung wird durch

$$\mathbf{P}_{\lambda/4,y} = e^{i\pi/4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad (4.5.31)$$

Mit der Gleichung (4.5.17) hatten wir ein schräg stehendes $\lambda/4$ -Plättchen berechnet. Die Gleichung ist aber allgemeiner: sie beschreibt ein Verzögerungselement von ϕ gedreht um α zur y -Achse.

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}_{VZ}(\alpha, \phi) = \\ &\begin{pmatrix} \cos(\phi(\ell)/2) + i \cos 2\alpha \sin(\phi(\ell)/2) & i \sin 2\alpha \sin(\phi(\ell)/2) \\ i \sin 2\alpha \sin(\phi(\ell)/2) & \cos(\phi(\ell)/2) - i \cos 2\alpha \sin(\phi(\ell)/2) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.5.32)$$

Das Verzögerungselement mit der schnellen Achse parallel zur y -Achse ist durch

$$\mathbf{P}_{VZ,y} = \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix} \quad (4.5.33)$$

gegeben. Die folgende Tabelle zeigt aus Gleichung (4.5.32) berechenbaren Elemente.

Jones-Matrix	Bedeutung
$\mathbf{P}_{\lambda/4,y} = e^{i\pi/4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$	$\lambda/4$ -Plättchen mit der schnellen Achse in y
$\mathbf{P}_{\lambda/4,z} = e^{i\pi/4} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\lambda/4$ -Plättchen mit der schnellen Achse in z
$\mathbf{P}_{\lambda/4}(\alpha) = \mathbf{R}(\alpha)\mathbf{P}_{\lambda/4,y}\mathbf{R}(-\alpha)$	$\lambda/4$ -Plättchen mit der schnellen Achse gedreht um α bezüglich y
$\mathbf{P}_{\lambda/2,y} = \mathbf{P}_{\lambda/4,y}\mathbf{P}_{\lambda/4,y} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$	$\lambda/2$ -Plättchen mit der schnellen Achse in y
$\mathbf{P}_{\lambda/2,z} = \mathbf{P}_{\lambda/4,z}\mathbf{P}_{\lambda/4,z} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$	$\lambda/2$ -Plättchen mit der schnellen Achse in z
$\mathbf{P}_{\lambda/2}(\alpha) = \mathbf{R}(\alpha)\mathbf{P}_{\lambda/2,y}\mathbf{R}(-\alpha)$	$\lambda/2$ -Plättchen mit der schnellen Achse gedreht um α bezüglich y

Wenn ein Lichtstrahl mit der Polarisation \mathbf{A} durch die Objekte $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_n$ geht, ist die resultierende Welle

$$\mathbf{A}_{\text{Ende}} = \mathbf{T}_n \mathbf{T}_{n-1} \dots \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 \mathbf{A} \quad (4.5.34)$$

Mit den oben angegebenen Polarisations- und Rotationsmatrizen können die meisten Polarisationsprobleme berechnet werden.

4.5.6. Beispiele zur Polarisation

(Siehe Gerthsen, Physik [Mes06, pp. 535])

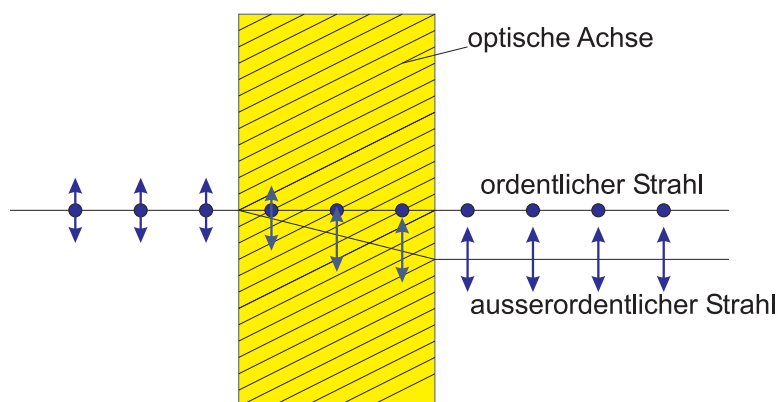


Abbildung 4.22.: Aufspaltung eines Lichtstrahls in einem doppelbrechenden Material wie Kalkspat

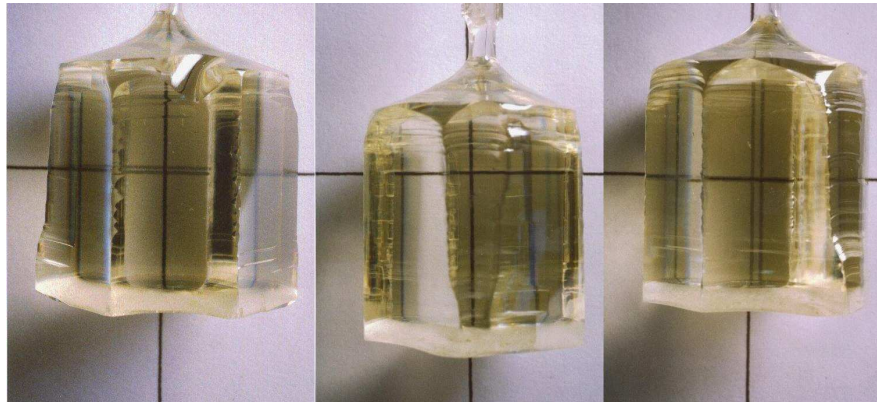


Abbildung 4.23.: Doppelbrechung in einem NaVO_4Mn -Kristall (gezüchtet von A. Lentz, fotografiert von M. Pietralla). Gezeigt wird, dass die drei Kristallrichtungen eines sechseckig scheinenden Kristalls nicht äquivalent sind.

Viele Kristalle sind nicht isotrop. Es gibt auch in diesen Kristallen Achsen, die eine höhere Symmetrie aufweisen, als die anderen Achsen. Diese Achse wird *Hauptachse* genannt. Alle physikalischen Eigenschaften eines Kristalls, also auch die optischen Eigenschaften, müssen die Symmetrie des Kristalls haben. Die physikalischen Eigenschaften und insbesondere die *Lichtgeschwindigkeit* sind in allen Ebenen senkrecht zur Hauptachse isotrop. Dabei ist die Lichtgeschwindigkeit aber von der Polarisationsrichtung des Lichtes abhängig. In Richtung der Hauptachse ist die Lichtgeschwindigkeit unabhängig von der Polarisationsrichtung c_0 . Licht, das sich senkrecht zur Polarisationsrichtung ausbreitet, bewegt sich ebenfalls mit c_0 , wenn der \mathbf{E} -Vektor in Richtung der Hauptachse zeigt, die Polarisationsrichtung also senkrecht zur Hauptachse liegt. Dieses Licht heisst *ordentliches Licht*. Licht mit der anderen Polarisationsrichtung läuft im Kalkspat schneller, und zwar mit $c_{ao} = 1.116c_0$. Dieses Licht heisst *ausserordentliches Licht*. Wenn die Einfallsrichtung dazwischen liegt, ist die Geschwindigkeit des ordentlichen Lichts immer noch c_0 , die des ausserordentlichen Lichts liegt zwischen c_0 und c_{ao} .

Die Wellenflächen des ordentlichen Lichts stammend von einer punktförmigen Quelle sind also Kugelflächen, während die Wellenflächen des ausserordentlichen Lichts Rotationsellipsoide sind, deren Rotationsachse mit der Hauptachse parallel ist. Bei Kalkspat ist das Rotationsellipsoid abgeplattet, das Material heisst *einachsigen negativ*. Bei Quarz ist das Rotationsellipsoid länglich (die ordentliche Lichtgeschwindigkeit ist grösser als die ausserordentliche). Man nennt Quarz deshalb *einachsigen positiv*.

Wenn Licht senkrecht auf eine Fläche fällt, die schräg zur Hauptachse liegt, müssen zwei verschiedene Konstruktionen verwendet werden:

- Kugelflächen beim ordentlichen Licht
- Rotationsellipsoide beim ausserordentlichen Licht. Die Rotationsachse liegt schief zur Einfallsrichtung.

Da die resultierenden Flächen Tangentenflächen sind, bleibt die Richtung des ordentlichen Lichtes senkrecht zur *Oberfläche*, während das ausserordentliche Licht sich schräg weiter ausbreitet. Zur Berechnung des Lichtweges müssen Tensoren verwendet werden.

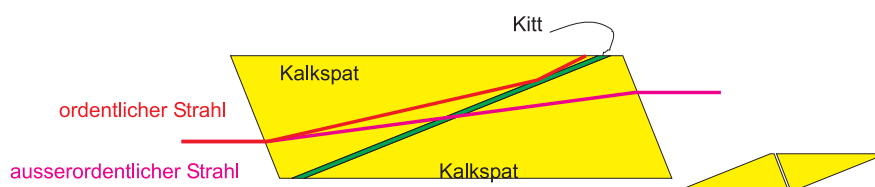


Abbildung 4.24.: Das Nicolsche Prisma, kurz Nicol, ist eine Anwendung der Doppelbrechung zur Polarisierung. Der spitze Winkel ist 68° , der abgeflachte Winkel genau 90° . Die optische Achse liegt senkrecht zur Längsachse in der Bildebene. Das Nicol-Prisma entsteht aus dem rechts gezeigten länglichen Kalkspatkristall, der diagonal geschnitten wird. Er wird mit einem Kitt, dessen *Brechungsindex* wie der *Brechungsindex* des ausserordentlichen Strahls ist, wieder zusammengeklebt. Der ausserordentliche Strahl geht dann ohne grössere Ablenkung durch das Nicol-Prisma, während der ordentliche Strahl am Kitt totalreflektiert wird und aus dem Strahlengang verschwindet.

In der Technik war die spannungsinduzierte Doppelbrechung lange das einzige Mittel, unzulässige Beanspruchungen in Bauteilen festzustellen.



Versuch zur Vorlesung:

Spannungsdoppelbrechung (Versuchskarte O-008)

4.6. Die Fresnelschen Formeln

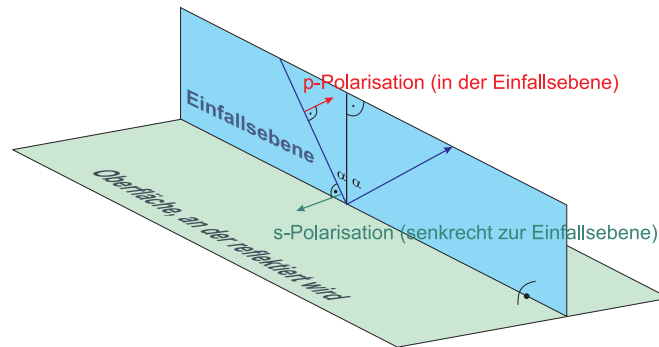


(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 175]) (Siehe Gerthsen, Physik [Mes06, pp. 539])



Versuch zur Vorlesung:

Fresnelsche Formeln (Versuchskarte O-039)


 Abbildung 4.25.: Definition der *s-Polarisation* und der *p-Polarisation*

Die *Reflexion* und die Brechung von Licht wird durch die Fresnelschen Formeln bestimmt. Wir verwenden die Definitionen

- Der einfallende und der reflektierte Strahl definiert die *Einfallsebene*. Diese ist senkrecht zur Grenzfläche der beiden Medien.
- Licht, dessen Polarisationssebene senkrecht zur *Einfallsebene* liegt, heisst *s-polarisiertes Licht*.
- Licht, dessen Polarisationssebene parallel zur *Einfallsebene* liegt, heisst *p-polarisiertes Licht*.
- Für die *Intensität* des Lichtes gilt in nichtmagnetischen Medien $I \propto \sqrt{\epsilon} E^2$, wobei $\epsilon = n^2$ ist.
- Genauer gilt für die Intensität: $I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0}{\mu \mu_0}} E^2 = \frac{n \epsilon_0 c}{2} E^2$ für sinusförmige Wellen mit der Amplitude E .

Im folgenden betrachten wir nur nichtmagnetische Materialien.

Wir beginnen die Rechnungen für Licht mit einer Polarisierung senkrecht zur *Einfallsebene* (*s-Polarisation*).

Wenn in den beiden angrenzenden Medien die *Dielektrizitätskonstanten* ϵ und ϵ' sind, dann muss der *Energiestrom* an der Grenzfläche kontinuierlich sein, also

$$\frac{n \epsilon_0 c}{2} (E_e^2 - E_r^2) \cos \alpha = \frac{n' \epsilon_0 c}{2} E_g^2 \cos \beta \quad (4.6.1)$$

wobei α und β die Winkel zur *Oberflächennormalen* sind, E_e ist die E -Feldkomponente des einfallenden Lichtes parallel zur *Oberfläche*, E_r die des reflektierten (beachte das Vorzeichen) und E_g die des gebrochenen.

Vereinfacht kann man die Energieerhaltung schreiben als

$$n (E_e^2 - E_r^2) \cos \alpha = n' E_g^2 \cos \beta \quad (4.6.2)$$

Die Komponente von \mathbf{E} parallel zur *Oberfläche* muss stetig sein, also ist $E_e + E_r = E_g$.

Wir beachten, dass $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ ist und dividieren die beiden Gleichungen durcheinander. Wir erhalten

$$n(E_e - E_r) \cos \alpha = n'E_g \cos \beta \quad (4.6.3)$$

Nach dem Brechungsgesetz ist $n'/n = \sin \alpha / \sin \beta$. Wir setzen dies ein und erhalten

$$(E_e - E_r) \sin \beta \cos \alpha = E_g \sin \alpha \cos \beta \quad (4.6.4)$$

Mit $E_e - E_r = E_g$ bekommen wir

Fresnelsche Formeln für die *s*-Polarisation

$$\begin{aligned} E_r &= E_e \frac{\sin \beta(\alpha) \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta(\alpha)}{\sin \beta(\alpha) \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta(\alpha)} \\ &= -E_e \frac{\sin(\alpha - \beta(\alpha))}{\sin(\alpha + \beta(\alpha))} \\ E_g &= E_e \frac{2 \sin \beta(\alpha) \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta(\alpha))} \end{aligned} \quad (4.6.5)$$

- Wenn $\alpha > \beta$, wenn also das Licht aus dem optisch dünneren Medium auf das optisch dichtere Medium trifft, haben E_e und E_r unterschiedliche Vorzeichen: es tritt ein Phasensprung um π bei der *Reflexion* auf.
- Bei der *Reflexion* am dünneren Medium $\alpha < \beta$ wechselt $\sin(\alpha - \beta)$ das Vorzeichen. Es gibt keinen Phasensprung bei der *Reflexion*.
- Die Gesetze für die *Intensität* bekommt man durch quadrieren und unter Berücksichtigung der relativen Dielektrizitätszahl ε und der relativen Permeabilität μ .
- Bei fast senkrechtem Einfall bekommt man $E_r = -E_e \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta} = -E_e \frac{n' - n}{n' + n}$

Fresnelsche Formeln für die Intensität bei der *s*-Polarisation für nichtmagnetische Materialien

$$\begin{aligned} I_r &= I_e \frac{[\sin \beta(\alpha) \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta(\alpha)]^2}{[\sin \beta(\alpha) \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta(\alpha)]^2} \\ &= I_e \frac{\sin^2(\alpha - \beta(\alpha))}{\sin^2(\alpha + \beta(\alpha))} \\ I_g &= \frac{n'}{n} I_e \frac{4 \sin^2 \beta(\alpha) \cos^2 \alpha}{\sin^2(\alpha + \beta(\alpha))} \end{aligned} \quad (4.6.6)$$

Wir haben die einfallende Intensität $I_e = n \frac{\epsilon_0 c}{2} E_e$ als Referenz verwendet. Deshalb erscheint der Vorfaktor $\frac{n'}{n}$ für I_g .

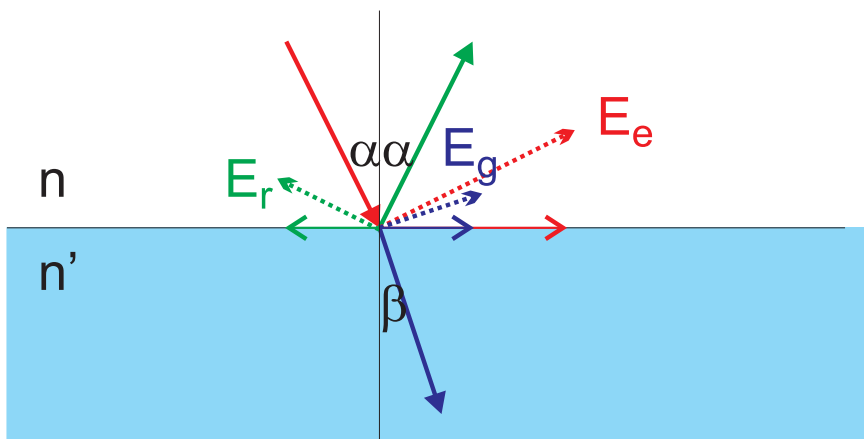


Abbildung 4.26.: Stetigkeitsbedingungen für Licht mit p-Polarisation. Die dicken Vektoren stellen die \mathbf{k} -Vektoren dar (rot für das einfallende Licht, grün für das reflektierte und blau für das gebrochene Licht). Die \mathbf{E} -Vektoren sind gestrichelt gezeichnet, ihre Projektion auf die Grenzfläche dünn.

Bei p -polarisiertem Licht ist die Bedingung für die Stetigkeit der Parallelkomponente von \mathbf{E} durch

$$(E_e + E_r) \cos \alpha = E_g \cos \beta \quad (4.6.7)$$

gegeben. Weiter gilt immer noch die Energieerhaltung

$$n (E_e^2 - E_r^2) \cos \alpha = n' E_g^2 \cos \beta \quad (4.6.8)$$

Teilen wir die beiden Gleichungen, erhalten wir

$$n (E_e - E_r) = n' E_g \quad (4.6.9)$$

Wir wenden wieder das Snelliussche Gesetz an

$$n (E_e - E_r) = n \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} E_g \quad (4.6.10)$$

Damit müssen wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} E_e \sin \beta &= E_r \sin \beta + E_g \sin \alpha \\ E_e \cos \alpha &= -E_r \cos \alpha + E_g \cos \beta \end{aligned} \quad (4.6.11)$$

lösen. Wir multiplizieren die erste Gleichung mit $\cos \alpha$ und die zweite mit $\sin \beta$ und addieren

$$E_e (\sin \beta \cos \alpha + \sin \beta \cos \alpha) = E_g (\sin \alpha \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta) \quad (4.6.12)$$

Mit $\sin(\alpha \pm \beta) \cos(\alpha \mp \beta) = \sin \alpha \cos \alpha \pm \sin \beta \cos \beta$ wird die obige Gleichung

$$E_e (2 \sin \beta \cos \alpha) = E_g \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) \quad (4.6.13)$$

Um E_r zu bekommen multiplizieren wir die obere Gleichung in Gleichung (4.6.11) mit $\cos \beta$ und die untere mit $\sin \alpha$, subtrahieren und erhalten

$$E_e (\sin \beta \cos \beta - \cos \alpha \sin \alpha) = E_r (\sin \beta \cos \beta + \sin \alpha \cos \alpha) \quad (4.6.14)$$

Dies ist auch

$$E_e \sin(\beta - \alpha) \cos(\beta + \alpha) = E_r \sin(\beta + \alpha) \cos(\beta - \alpha) \quad (4.6.15)$$

Damit erhält man

Fresnelsche Formeln (p-Polarisation):

$$\begin{aligned} E_r &= -E_e \frac{\tan[\alpha - \beta(\alpha)]}{\tan[\alpha + \beta(\alpha)]} \\ E_g &= E_e \frac{2 \sin \beta(\alpha) \cos \alpha}{\sin[\alpha + \beta(\alpha)] \cos[\alpha - \beta(\alpha)]} \end{aligned} \quad (4.6.16)$$

Wenn in der Gleichung für E_r $\alpha + \beta(\alpha) = \pi/2$ ist, divergiert der Nenner, wir erhalten also $E_r(\alpha = \pi/2 - \beta(\alpha)) = 0$. Dies ist der *Brewster-Winkel*.

Die Fresnelschen Formeln für die Intensität lauten

Fresnelsche Formeln für die Intensität bei (p-Polarisation):

$$\begin{aligned} I_r &= I_e \frac{\tan^2[\alpha - \beta(\alpha)]}{\tan^2[\alpha + \beta(\alpha)]} \\ I_g &= \frac{n'}{n} I_e \frac{4 \sin^2 \beta(\alpha) \cos^2 \alpha}{\sin^2[\alpha + \beta(\alpha)] \cos[\alpha - \beta(\alpha)]} \end{aligned} \quad (4.6.17)$$

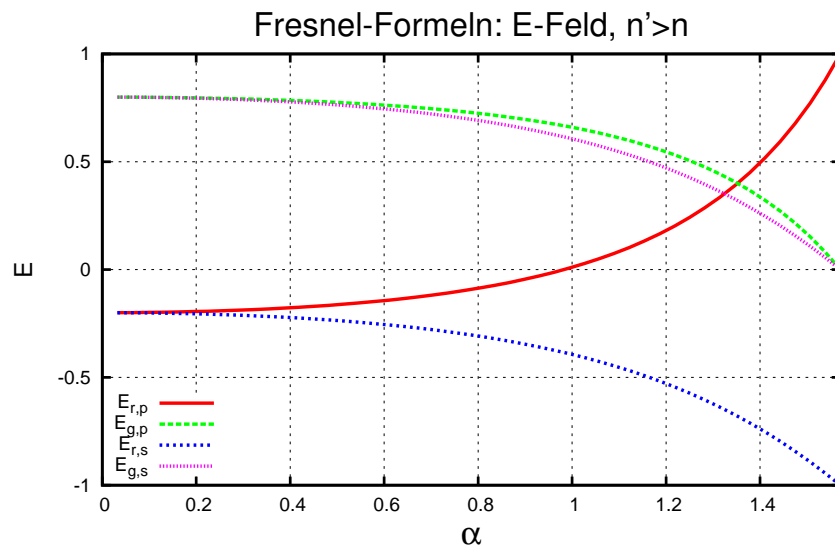


Abbildung 4.27.: Verlauf der *Amplitude* des elektrischen Feldes für *p*- und *s*-Polarisation, wenn Licht aus dem dünneren Medium ($n_1 = 1$) in das dichtere ($n_2 = 1.5$) eintritt.

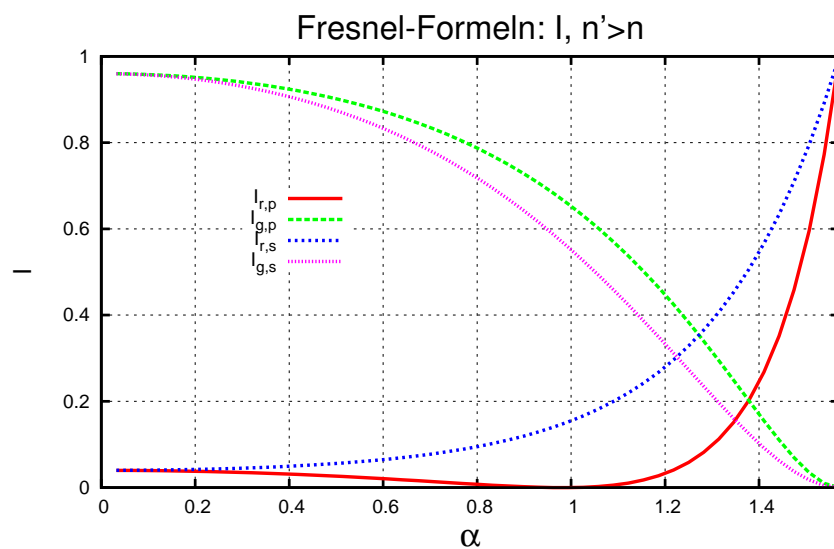


Abbildung 4.28.: Verlauf der *Intensität* für *p*- und *s*-Polarisation, wenn Licht aus dem dünneren Medium ($n_1 = 1$) in das dichtere ($n_2 = 1.5$) eintritt. Die *Intensität* ist mit $I = n_i E^2$ berechnet worden, wobei n_i die für das jeweilige Medium gültige Brechzahl ist.

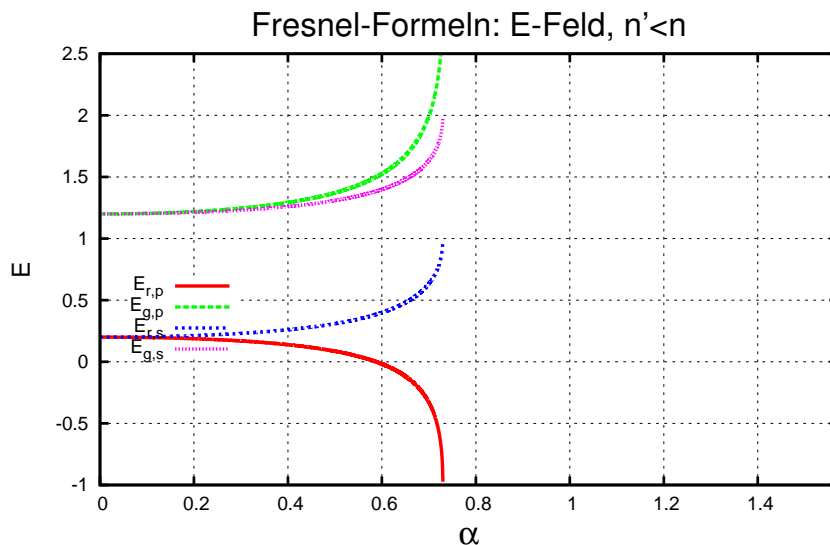


Abbildung 4.29.: Verlauf der *Amplitude* des elektrischen Feldes für *p*- und *s*-*Polarisation*, wenn Licht aus dem dichteren ($n_1 = 1.5$) Medium in das dünnere ($n_2 = 1$) eintritt.

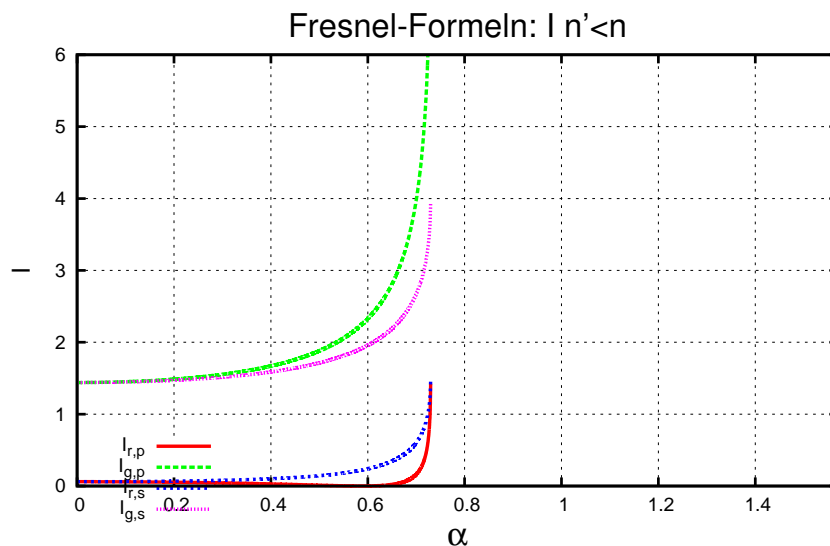


Abbildung 4.30.: Verlauf der *Intensität* für *p*- und *s*-*Polarisation*, wenn Licht aus dem dichteren ($n_1 = 1.5$) Medium in das dünnere ($n_2 = 1$) eintritt. Die *Intensität* ist mit $I = n_i E^2$ berechnet worden, wobei n_i die für das jeweilige Medium gültige Brechzahl ist.

Wir können kontrollieren, ob im Energiefluss senkrecht zur Grenzfläche die Energie erhalten bleibt. Dazu müssen wir den Energiefluss durch eine Fläche parallel zur

Oberfläche berechnen. Der einfallende Energiefluss ist

$$I_{e,\perp} = n \frac{\epsilon_0 c}{2} E_e^2 \cos \alpha \quad (4.6.18)$$

Der Fluss der reflektierten Energie durch eine Fläche parallel zur Grenzfläche ist

$$I_{r,\perp} = n \frac{\epsilon_0 c}{2} E_r^2 \cos \alpha \quad (4.6.19)$$

Ebenso ist der Fluss der gebrochenen Energie durch eine Fläche parallel zur Grenzfläche

$$I_{g,\perp} = n' \frac{\epsilon_0 c}{2} E_g^2 \cos \alpha \quad (4.6.20)$$

Die Energieerhaltung sagt nun, dass für die p -Polarisation

$$\begin{aligned} I_{e,p,\perp} &= n \frac{\epsilon_0 c}{2} E_e^2 \cos \alpha \\ &= I_{r,p,\perp} + I_{g,p,\perp} \\ &= n \frac{\epsilon_0 c}{2} E_e^2 \frac{\tan^2[\alpha - \beta(\alpha)]}{\tan^2[\alpha + \beta(\alpha)]} \cos \alpha \\ &\quad + n' \frac{\epsilon_0 c}{2} E_e^2 \frac{4 \sin^2 \beta(\alpha) \cos^2 \alpha}{\sin^2[\alpha + \beta(\alpha)] \cos^2[\alpha - \beta(\alpha)]} \cos(\beta(\alpha)) \\ &= \frac{\epsilon_0 c}{2} E_e^2 \\ &\quad \left[n \frac{\sin^2[\alpha - \beta(\alpha)] \cos^2[\alpha - \beta(\alpha)] \cos \alpha}{\sin^2[\alpha + \beta(\alpha)] \cos^2[\alpha - \beta(\alpha)]} \right. \\ &\quad \left. + n' \frac{4 \sin^2 \beta(\alpha) \cos^2 \alpha \cos(\beta(\alpha))}{\sin^2[\alpha + \beta(\alpha)] \cos^2[\alpha - \beta(\alpha)]} \right] \\ &= \frac{n \epsilon_0 c}{2} E_e^2 \\ &\quad \left[\sin^2[\alpha - \beta(\alpha)] \cos^2[\alpha + \beta(\alpha)] \cos \alpha \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin \alpha}{\sin \beta(\alpha)} 4 \sin^2 \beta(\alpha) \cos^2 \alpha \cos(\beta(\alpha)) \right] \\ &\quad \cdot \left[\sin^2[\alpha + \beta(\alpha)] \cos^2[\alpha - \beta(\alpha)] \right]^{-1} \\ &= \frac{n \epsilon_0 c}{2} E_e^2 \cos \alpha \\ &\quad \left[\sin^2[\alpha - \beta(\alpha)] \cos^2[\alpha + \beta(\alpha)] \right. \\ &\quad \left. + 4 \sin \alpha \sin \beta(\alpha) \cos \alpha \cos(\beta(\alpha)) \right] \\ &\quad \cdot \left[\sin^2[\alpha + \beta(\alpha)] \cos^2[\alpha - \beta(\alpha)] \right]^{-1} \end{aligned} \quad (4.6.21)$$

gilt.

Wir müssen also den Wert des Bruches

$$\begin{aligned} X &= \left\{ \sin^2[\alpha - \beta(\alpha)] \cos^2[\alpha + \beta(\alpha)] + 4 \sin \alpha \sin \beta(\alpha) \cos \alpha \cos(\beta(\alpha)) \right\} \\ &\quad \cdot \left\{ \sin^2[\alpha + \beta(\alpha)] \cos^2[\alpha - \beta(\alpha)] \right\}^{-1} \end{aligned}$$

berechnen.

$$\begin{aligned}
X &= \left\{ \sin^2[\alpha - \beta] \cos^2[\alpha + \beta] + \sin(2\alpha) \sin(2\beta) \right\} \\
&\quad \cdot \left\{ \sin^2[\alpha + \beta] \cos^2[\alpha - \beta] \right\}^{-1} \\
&= \left\{ \sin^2[\alpha - \beta] \cos^2[\alpha + \beta] + \sin(2\alpha) \sin(2\beta) \right\} \\
&\quad \cdot \left\{ \sin^2[\alpha + \beta] \cos^2[\alpha - \beta] \right\}^{-1} \\
&= \left\{ \frac{1}{2} (1 - \cos[2\alpha - 2\beta]) \frac{1}{2} (1 + \cos[2\alpha + 2\beta]) \right. \\
&\quad \left. + \sin(2\alpha) \sin(2\beta) \right\} \\
&\quad \cdot \left\{ \frac{1}{2} (1 - \cos[2\alpha + 2\beta]) \frac{1}{2} (1 + \cos[2\alpha - 2\beta]) \right\}^{-1} \\
&= \left\{ (1 - \cos[2\alpha - 2\beta]) (1 + \cos[2\alpha + 2\beta]) \right. \\
&\quad \left. + 4 \sin(2\alpha) \sin(2\beta) \right\} \\
&\quad \cdot \left\{ (1 - \cos[2\alpha + 2\beta]) (1 + \cos[2\alpha - 2\beta]) \right\}^{-1} \\
&= \left\{ (1 - \cos[2\alpha - 2\beta]) (1 + \cos[2\alpha + 2\beta]) \right. \\
&\quad \left. + 2 (\cos[2\alpha - 2\beta] - \cos[2\alpha + 2\beta]) \right\} \\
&\quad \cdot \left\{ (1 - \cos[2\alpha + 2\beta]) (1 + \cos[2\alpha - 2\beta]) \right\}^{-1}
\end{aligned} \tag{4.6.22}$$

Wir setzen $A = \cos[2\alpha - 2\beta]$ und $B = \cos[2\alpha + 2\beta]$ und schreiben die Gleichung um

$$\begin{aligned}
X &= \frac{(1 - A)(1 + B) + 2A - 2B}{(1 - B)(1 - A)} \\
&= \frac{1 - A + B - AB + 2A - 2B}{1 + A - B - AB} \\
&= \frac{1 + A - B - AB}{1 + A - B - AB} \\
&= 1
\end{aligned} \tag{4.6.23}$$

Da $X = 1$ ist, ist gezeigt, dass für den Energiefluss durch die Grenzfläche für p -Polarisation Energieerhaltung gilt.

Eine ähnliche Gleichung kann man für die s -Polarisation berechnen. In der Elektrizitätslehre würde man sagen, dass der Fluss des Pointing-Vektors berechnet wurde.

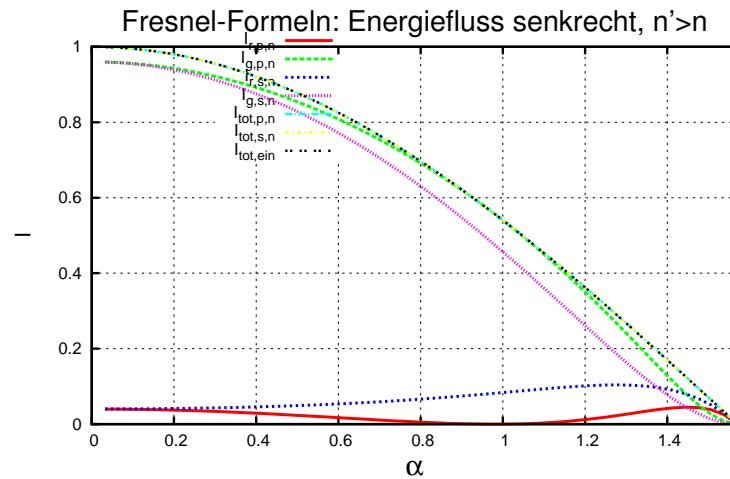


Abbildung 4.31.: Verlauf der mit der Fläche gewichteten *Intensität* für *p*- und *s*-Polarisation, wenn Licht aus dem dünneren ($n_1 = 1$) Medium in das dichtere ($n_2 = 1.5$) eintritt. Die *Intensität* ist mit $I = n_i E^2 \cos(\alpha_i)$ berechnet worden, wobei n_i die für das jeweilige Medium gültige Brechzahl und α_i der entsprechende Winkel ist. Die drei Kurven für die gesamte Intensität bei der *p*-Polarisation und der *s*-Polarisation liegen über der Kurve der winkelgewichteten Intensität des einfallenden Lichtes.

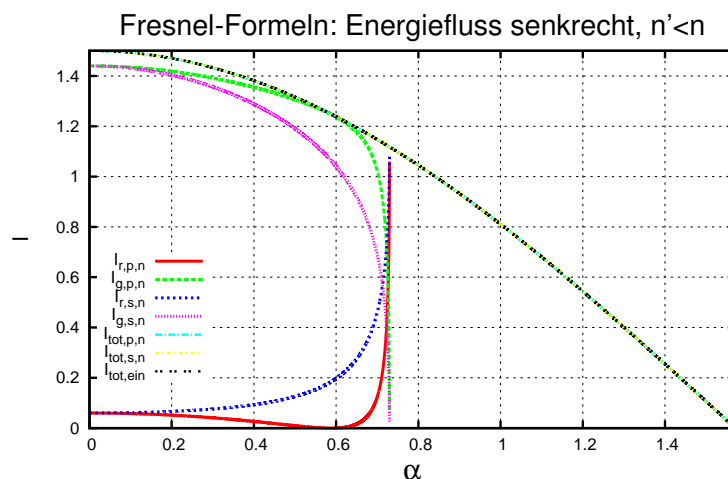


Abbildung 4.32.: Verlauf der mit der Fläche gewichteten *Intensität* für *p*- und *s*-Polarisation, wenn Licht aus dem dichteren ($n_1 = 1.5$) Medium in das dünnere ($n_2 = 1$) eintritt. Die *Intensität* ist mit $I = n_i E^2 \cos(\alpha_i)$ berechnet worden, wobei n_i die für das jeweilige Medium gültige Brechzahl und α_i der entsprechende Winkel ist. Die drei Kurven für die gesamte Intensität bei der *p*-Polarisation und der *s*-Polarisation liegen über der Kurve der winkelgewichteten Intensität des einfallenden Lichtes. Im Bereich der Totalreflexion gibt die Rechnung den Energiefluss korrekt wieder.

Parallel zur Oberfläche ist es wegen der Translationssymmetrie schwieriger Energieerhaltungsgrößen zu definieren.

Die dritte Stetigkeitsbedingung an der Grenzfläche, die der Normalkomponente von $\epsilon \mathbf{E} = \mathbf{D}$ liefert das Snelliussche Gesetz.

4.6.1. Evaneszente Wellen

(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 193,196])



Versuch zur Vorlesung:

Evaneszente Wellen - tunneln mit Licht (Versuchskarte O-080)

Aus den letzten Abbildungen ist ersichtlich, dass wenn Licht aus dem dichteren Medium in das dünnere eintritt, es Winkel gibt ($n' \sin \beta > 1$), für die es keine reelle Lösung der Fresnelschen Formeln gibt. Die Lösung ist rein imaginär. Was bedeutet dies? Dies heisst, dass auch der \mathbf{k} -Vektor des Lichtes im dünneren Medium imaginär wird. Darum wird aus $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ mit $\mathbf{k} = i\boldsymbol{\kappa}$ der exponentielle Dämpfungsfaktor $e^{-\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}}$, wobei $\boldsymbol{\kappa}$ vom Einfallswinkel abhängt. Licht im dünneren Medium kann also nicht propagieren: Wegen der Energieerhaltung ist die *Reflexion* perfekt.

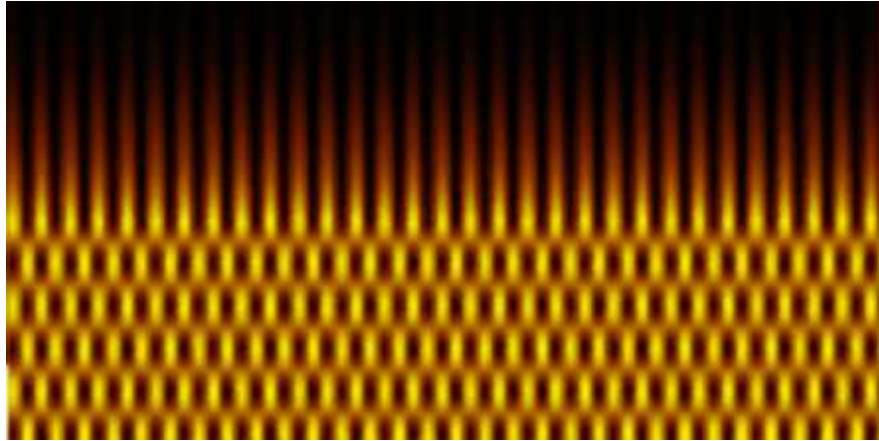


Abbildung 4.33.: Momentaufnahme der Interferenz einer total reflektierten Welle mit sich selber sowie der evaneszenten Wellen.

5. Interferenz und Beugung



(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 562]) (Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 649]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 327]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 348]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1109])



Versuch zur Vorlesung:

Wellenmaschine (Versuchskarte SW-077)

In diesem Abschnitt sollen die Eigenschaften von Licht, die auf der Wellennatur beruhen, diskutiert werden.

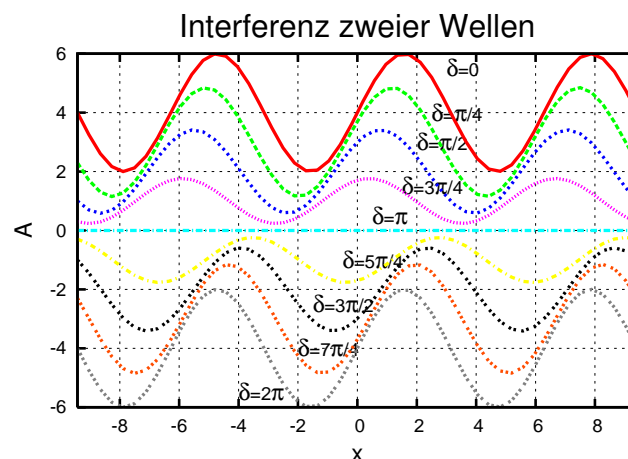


Abbildung 5.1.: Interferenz zweier Wellen mit der gleichen *Amplitude* und der gleichen Frequenz und einer Phase, die von $0 \dots 2\pi$ variiert.

Mathematisch setzen wir zwei Wellen an

$$\begin{aligned} y_1(x, t) &= A \sin(kx - \omega t) \\ y_2(x, t) &= A \sin(kx - \omega t + \delta) \end{aligned} \quad (5.0.1)$$

An einem bestimmten Ort ist die Differenz der Phasen durch

$$(kx - \omega t_1) - (kx - \omega t_2 + \delta) = \omega(t_1 - t_2) - \delta = \omega \Delta t - \delta \quad (5.0.2)$$

gegeben und unabhängig vom Ort. Zu einer bestimmten Zeit ist die Differenz der Phasen durch

$$(kx_1 - \omega t) - (kx_2 - \omega t + \delta) = k(x_1 - x_2) - \delta = k \Delta x - \delta \quad (5.0.3)$$

gegeben, unabhängig von der Zeit.

Wir wenden die Additionstheoreme für die Winkelfunktionen an. Wir verwenden

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \quad (5.0.4)$$

und erhalten

$$\begin{aligned} y(x, t) &= y_1(x, t) + y_2(x, t) \\ &= A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx - \omega t + \delta) \\ &= 2A \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \sin\left(kx - \omega t + \frac{\delta}{2}\right) \end{aligned} \quad (5.0.5)$$

Aus dieser Gleichung kann die folgende Tabelle abgeleitet werden.

Phase	resultierende <i>Amplitude</i>	Interferenz
0	2A	konstruktiv
$\pi/2$	$\sqrt{2}A$	
π	0	destruktiv
$3\pi/2$	$\sqrt{2}A$	
2π	2A	konstruktiv

Tabelle 5.1.: Interferenz und Phasendifferenz



5.1. Phasendifferenz und Kohärenz

(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 570]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 367]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1109]) (Siehe Gerthsen, Physik [Mes06, pp. 514])
Wir betrachten Wellen, die sich auf verschiedenen Wegen ausbreiten.

Zwei Wellen heissen kohärent, wenn sie, bis auf eine Phase die gleiche Zeitabhängigkeit haben.



Versuch zur Vorlesung:

Kohärenz (Versuchskarte O-051)

Die Kohärenz von Wellen ist nur im Idealfall überall und zu jeder Zeit gegeben.

Kohärenzzeit Jede Quelle hat ein beschränktes Phasengedächtnis. Dies bedeutet, dass die Wellenzüge, die vor einer Zeit grösser als die Kohärenzzeit τ emittiert wurden, keine definierte Phasenbeziehung mehr haben. Der Phasenunterschied wird eine stochastische Grösse.

Kohärenzlänge Die Kohärenzzeit τ kann in eine Kohärenzlänge L umgerechnet werden. Ist der Weglängenunterschied grösser als L , gibt es keine Kohärenz mehr.

Hat eine Quelle (ein gedämpfter harmonischer Oszillator) eine Bandbreite $\Delta\omega$, dann ist die Kohärenzzeit $\tau \approx \omega^{-1}$ und $L \approx c\tau \approx \frac{c}{\Delta\omega}$.

Ist die Lichtquelle ausgedehnt (Breite b), dann gibt es nur im Winkelbereich $\sigma < \frac{\lambda}{4b}$ eine kohärente Überlagerung.

Die *Intensität* muss verschieden berechnet werden, je nachdem ob die beiden Wellenzüge mit den Amplituden E_1 und E_2 kohärent oder nicht sind.

bei kohärenten Wellenzügen $I(x, t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} (E_1(x, t) + E_2(x, t))^2$

bei inkohärenten Wellenzügen $I(x, t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} [E_1(x, t)^2 + E_2(x, t)^2]$

Bei kohärenten Wellen mit dem Phasenunterschied ϕ und den Amplituden E_1 und E_2 ist die resultierende *Amplitude*

$$\begin{aligned} E(x, t) &= E_1 e^{i(kx - \omega t)} + E_2 e^{i(kx - \omega t - \phi(x))} \\ &= E_1 \left(e^{i(kx - \omega t)} + e^{i(kx - \omega t - \phi(x))} \right) + (E_2 - E_1) e^{i(kx - \omega t - \phi(x))} \\ &= E_1 e^{i(kx - \omega t)} \left(1 + e^{i\phi(x)} \right) + (E_2 - E_1) e^{i(kx - \omega t - \phi(x))} \end{aligned} \quad (5.1.1)$$



5.1.1. Stehende Wellen

(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 431]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 293]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 435]) (Siehe Gerthsen, Physik [Mes06, pp. 513])

Wenn wir eine nach links laufende Welle $y_1(x, t) = E \sin(kx + \omega t)$ und eine nach rechts laufende Welle $y_2 = E \sin(kx - \omega t + \delta)$ zur Interferenz kommen lassen, erhalten wir

$$\begin{aligned} y(x, t) &= y_1(x, t) + y_2(x, t) \\ &= E \sin(kx + \omega t) + E \sin(kx - \omega t + \delta) \\ &= 2E \cos\left(\omega t - \frac{\delta}{2}\right) \sin\left(kx + \frac{\delta}{2}\right) \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

Die Summe der beiden Wellenfunktionen ist das Produkt zweier Terme

- ein zeitabhängiger Teil, der für alle Orte gleich ist: $\cos\left(\omega t - \frac{\delta}{2}\right)$
- ein ortsabhängiger Teil, der für alle Zeiten gleich ist: $\sin\left(kx + \frac{\delta}{2}\right)$

Damit bilden sich räumlich stehende Knotenlinien aus, wir haben eine **stehende Welle**.

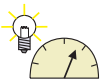
Wenn die Amplituden der beiden Wellen nicht gleich gross ist, dann interferieren von der Welle mit der grösseren *Amplitude* nur die Amplitudenteile, die gleich gross wie die *Amplitude* der schwächeren Welle sind.

Stehende Wellen als Resultat zweier gegenläufiger Wellen gibt es in jedem Resonator, insbesondere in Laserresonatoren.



5.1.2. Das Michelson-Interferometer

(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 596]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 360]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1114])



Versuch zur Vorlesung:

Michelson-Interferometer (Versuchskarte O-031)

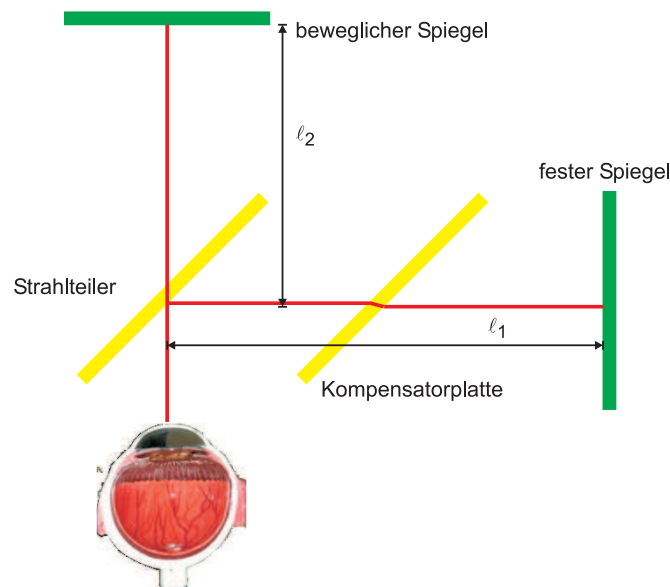


Abbildung 5.2.: Aufbau des Michelson-Interferometers.

Beim Michelson-Interferometer wird Licht durch einen Strahlteiler in zwei Lichtwege aufgespalten. Der Weg vom Strahlteiler zum festen Spiegel sei ℓ_1 , der zum

beweglichen ℓ_2 . Deshalb ist der gesamte Weglängenunterschied $\Delta\ell = 2(\ell_2 - \ell_1)$. Immer wenn $\Delta\ell$ ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge λ ist, tritt konstruktive Interferenz auf. Wird der bewegliche Spiegel um $\lambda/4$ verschoben, ändert sich $\Delta\ell$ um $\lambda/2$, dann haben wir destruktive Interferenz.

Wenn wir das Interferometer mit einer *Intensität* von I_0 betreiben und wenn wir eine Intensitätsänderung von ΔI noch messen können, dann können wir die mögliche Distanzauflösung in nichtmagnetischen Medien wie folgt berechnen:

$$I(x) = n \frac{\epsilon_0 c}{2} E^2 \cos^2 \left(2\pi \frac{x}{\lambda} \right) = I_0 \cos^2 \left(2\pi \frac{x}{\lambda} \right) \quad (5.1.3)$$

oder umgeschrieben

$$I(x) = \frac{I_0}{2} \left[1 + \cos \left(4\pi \frac{x}{\lambda} \right) \right] \quad (5.1.4)$$

Die Ableitung dieser Gleichung ist

$$\frac{dI(x)}{dx} = -\frac{2\pi I_0}{\lambda} \sin \left(4\pi \frac{x}{\lambda} \right) \quad (5.1.5)$$

Die maximale Steigung, also die höchste Empfindlichkeit ist

$$\left| \left(\frac{dI(x)}{dx} \right) \Big|_{max} \right| = \frac{2\pi I_0}{\lambda} \quad (5.1.6)$$

Wir können also die Distanz

$$\Delta x = \frac{\Delta I}{\left(\frac{dI(x)}{dx} \right) \Big|_{max}} = \frac{\Delta I}{2\pi I_0} \lambda \quad (5.1.7)$$

Wenn zum Beispiel $\lambda = 500$ nm ist und $\Delta I/I_0 = 0.01$ ist, ist $\Delta x = 2.75$ nm

5.1.3. Das *Fabry-Perot-Interferometer*



(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 212]) (Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 609]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 399])



Versuch zur Vorlesung:

Interferenz an dünnen Schichten als Beispiel für das Fabry-Perot-Interferometer (Versuchskarte O-085)

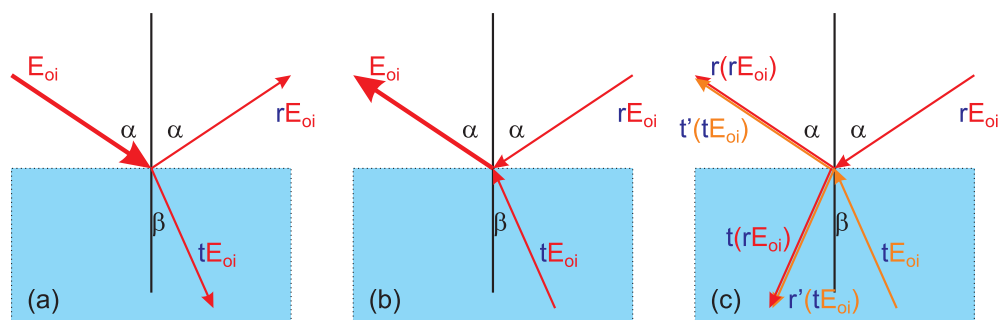


Abbildung 5.3.: Stokesche Behandlung von Reflexion und Brechung (nach Hecht [Hec])

Wir nehmen an, dass eine Welle mit der Amplitude E_{01} , die vom oberen Medium her auf die Grenzfläche auftritt, mit dem Faktor r reflektiert wird, sowie mit dem Faktor t gebrochen wird. Die Amplitude der gebrochenen Welle ist dann tE_{0i} , die der reflektierten Welle rE_{0i} . Das Fermatsche Prinzip bedeutet, dass auch die zeitumgekehrte Situation eine physikalisch realisierbare ist. Also ist auch die Strahlführung im Teilbild (b) oben eine realisierbare Situation. Dabei müssen wir uns klar machen, dass sowohl die einfallende Welle mit der Amplitude rE_{0i} und diejenige mit tE_{0i} eine reflektierte und eine transmittierte, gebrochene Welle erzeugen. Dabei ist für die Welle, die von unten kommt der Reflexionsfaktor r' und der Transmissionsfaktor t' . Die Situation in (c) ist nur dann äquivalent zu der in (b), wenn gilt

$$\begin{aligned} E_{0i} &= t(\alpha)t'(\beta)E_{0i} + r(\alpha)r(\alpha)E_{0i} \\ 0 &= t(\alpha)r'(\beta)E_{0i} + t(\alpha)r(\alpha)E_{0i} \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

Damit erhält man eine Verknüpfung der Reflexions- und Brechungskoeffizienten für den Übergang vom Medium 1 in das Medium 2 und umgekehrt. Dabei sind α und β die jeweiligen Einfallswinkel, die durch das Snelliussche Gesetz verknüpft sind.

$$\begin{aligned} t(\alpha)t'(\beta) &= 1 - r^2(\alpha) \\ r'(\beta) &= -r(\alpha) \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

Diese beiden Gleichungen heissen die *Stokeschen Relationen*. Die zweite Gleichung zeigt, dass wenn r für die Reflexion am dichteren Medium steht, bei der es nach den Fresnelschen Formeln einen Phasensprung von π gibt, dass dann bei der Reflexion am optisch dünneren Medium kein Phasensprung auftritt.

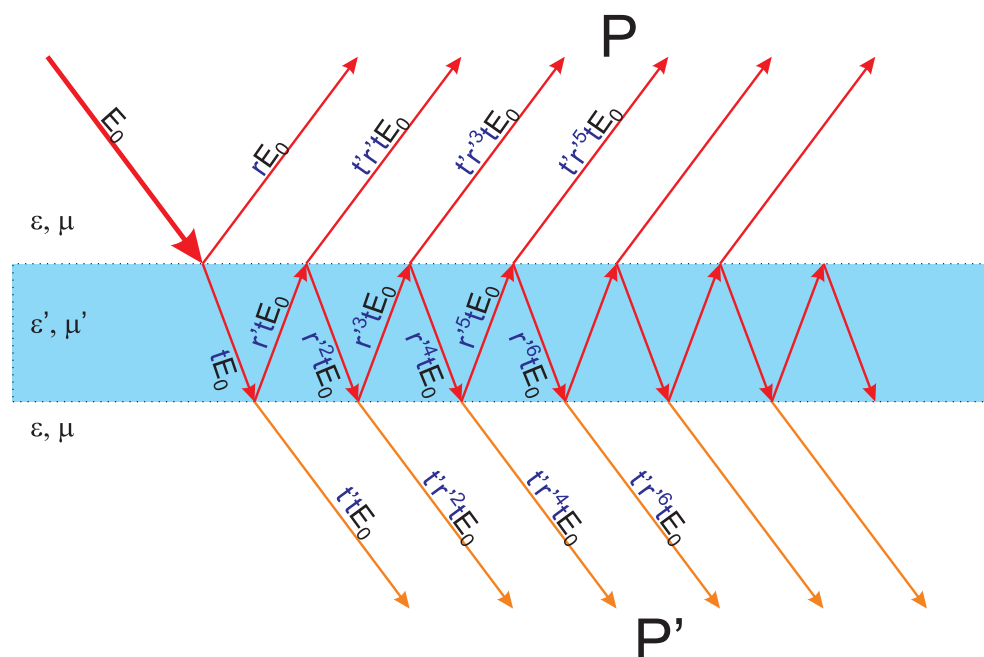


Abbildung 5.4.: Strahlengang bei einem *Fabry-Perot-Etalon* (nach Hecht [Hec])

Wir betrachten nun die Reflexion an einem *Etalon*, also einer Glasplatte mit dem Brechungsindex n_G mit planparallelen Oberflächen. Im Aussenraum sei auf beiden Seiten $n = 1$. Die Abbildung zeigt die reflektierten und gebrochenen Strahlen, wobei die Konvention der Gleichung (5.1.9) verwendet wurde. Die reflektierten Strahlen interferieren in dem weit entfernten Punkt P , die transmittierten Strahlen im weit entfernten Punkt P' . Wenn das Etalon die Dicke d hat und der Winkel der Strahlen zur Normalen im Inneren des Etalons β ist, dann ist der Gangunterschied zweier benachbarter Strahlen

$$\Lambda = 2n_G d \cos \beta \quad (5.1.10)$$

Bei den Strahlen, die in P interferieren, ist die Anzahl der inneren Reflexionen ungerade. Für den Spezialfall des senkrechten Einfalls, oder bei senkrechter Polarisation, ergeben die Reflexionen keine Phasenänderung. Wenn $\Lambda = m\lambda$ ist, haben in P alle Wellen die gleiche Phase, ausser der ersten, deren Phase wegen $r' = -r$ um π ändert. Also ist die reflektierte Amplitude

$$E_{0r} = rE_0 + (t'r'tE_0 + t'r'^3tE_0 + t'r'^5tE_0 + \dots) \quad (5.1.11)$$

Da $\Lambda = m\lambda$ und damit die innere Phasenverschiebung 0 ist, ersetzen wir r' mit $-r$ und erhalten

$$E_{0r} = E_0 \left[r - t'rt \left(1 + r^2 + r^4 + \dots \right) \right] \quad (5.1.12)$$

Diese geometrische Reihe konvergiert bei $r^2 < 1$ gegen $1/(1 - r^2)$, so dass wir

$$E_{0r} = E_0 \left[r - \frac{t'rt}{1 - r^2} \right] = E_0 r \left(1 - \frac{tt'}{1 - r^2} \right) \quad (5.1.13)$$

Nach den Stokeschen Relationen ist $tt' = 1 - r^2$ und damit die reflektierte Amplitude

$$E_{0r} = 0 \quad (5.1.14)$$

Also wird im Falle $\Lambda = m\lambda = 2n_G d \cos \beta$ oder $d \cos \beta = \frac{m\lambda}{2n_G}$ alles Licht transmittiert.

Der zweite Spezialfall ist $\Lambda = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$. Dann sind die relativen Phasen benachbarter Wellen, unter der Berücksichtigung dass $r' = -r$ und dass die innere Phase π ist, die Phasenverschiebung π , ausser bei den ersten beiden Wellen, die gleichphasig sind. Wir erhalten für die skalare Amplitude

$$E_{0r} = rE_0 + t'r t E_0 - t'r^3 t E_0 + t'r^5 t E_0 - \dots \quad (5.1.15)$$

oder

$$E_{0r} = E_0 r \left[1 + t't (1 - r^2 + r^2 - \dots) \right] \quad (5.1.16)$$

Die Reihe in der Klammer konvergiert gegen $1/(1 + r^2)$. Wir erhalten also

$$E_{0r} = E_0 r \left[1 + \frac{t't}{1 + r^2} \right] \quad (5.1.17)$$

Mit $t't = 1 - r^2$ erhalten wir

$$E_{0r} = E_0 r \left[1 + \frac{1 - r^2}{1 + r^2} \right] = E_0 r \frac{1 + r^2 + 1 - r^2}{1 + r^2} = E_0 \frac{2r}{1 + r^2} \quad (5.1.18)$$

Damit wird die reflektierte Intensität maximal, nämlich

$$I_r = \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} \frac{E_{0r}^2}{2} = \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_0}{\mu\mu_0}} \frac{4r^2}{(1 + r^2)^2} \frac{E_0^2}{2} \quad (5.1.19)$$

Den allgemeinen Fall kann man berechnen, indem man die durch die einfallende Welle $\tilde{E}_0(t) = E_0 e^{i\omega t}$ angeregten reflektierten Teilwellen aufschreibt, wobei zwischen zwei Teilwellen die Phasenverschiebung $\delta = k_0 \Lambda$ sind

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{1r}(t) &= E_0 r e^{i\omega t} \\ \tilde{E}_{2r}(t) &= E_0 t'r' t e^{i(\omega t - \delta)} \\ \tilde{E}_{3r}(t) &= E_0 t'r'^3 t e^{i(\omega t - 2\delta)} \\ \tilde{E}_{4r}(t) &= E_0 t'r'^5 t e^{i(\omega t - 3\delta)} \\ &\vdots \\ \tilde{E}_{Nr}(t) &= E_0 t'r'^{(2N-3)} e^{i(\omega t - (N-1)\delta)} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (5.1.20)$$

Die resultierende Welle ist die Summe aller Teilwellen

$$\tilde{E}_r = \tilde{E}_{1r} + \tilde{E}_{2r} + \tilde{E}_{3r} + \tilde{E}_{4r} + \dots \quad (5.1.21)$$

Eingesetzt ergibt sich

$$\tilde{E}_r = E_0 r e^{i\omega t} + E_0 t' r' t e^{i(\omega t - \delta)} + E_0 t' r'^3 t e^{i(\omega t - 2\delta)} + E_0 t' r'^5 t e^{i(\omega t - 3\delta)} + \dots \quad (5.1.22)$$

Zusammengefasst ergibt sich

$$\begin{aligned} \tilde{E}_r &= E_0 e^{i\omega t} \left\{ r + t' r' t e^{-i\delta} \left[1 + r'^2 t e^{-i\delta} + r'^4 e^{-i(2\delta)} + r'^6 e^{-i(3\delta)} + \dots \right] \right\} \quad (5.1.23) \\ &= E_0 e^{i\omega t} \left\{ r + t' r' t e^{-i\delta} \left[1 + (r'^2 t e^{-i\delta})^1 + (r'^2 t e^{-i\delta})^2 + (r'^2 t e^{-i\delta})^3 + \dots \right] \right\} \end{aligned}$$

Für $|r'^2 t e^{-i\delta}| < 1$ konvergiert die geometrische Reihe. Wir erhalten

$$\tilde{E}_r = E_0 e^{i\omega t} \left[r + \frac{t' r' t e^{-i\delta}}{1 - r'^2 t e^{-i\delta}} \right] \quad (5.1.24)$$

Mit den Stokeschen Relationen $r' = -r$ und $t't = 1 - r^2$ bekommt man

$$\tilde{E}_r = E_0 e^{i\omega t} \left[r - \frac{r(1 - r^2) e^{-i\delta}}{1 - r^2 t e^{-i\delta}} \right] = E_0 e^{i\omega t} \left[\frac{r(1 - e^{-i\delta})}{1 - r^2 t e^{-i\delta}} \right] \quad (5.1.25)$$

Die reflektierte optische Intensität ist $I_r = \tilde{E}_r \tilde{E}_r^* / 2$ und somit

$$I_r = \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} \frac{E_0^2}{2} r^2 \frac{(1 - e^{-i\delta})(1 - e^{+i\delta})}{1 - r^2 t e^{-i\delta}} (1 - r^2 t e^{+i\delta}) = I_i \frac{2r^2(1 - \cos \delta)}{(1 + r^4) - 2r^2 \cos \delta} \quad (5.1.26)$$

Mit einer analogen Ableitung berechnet man die transmittierte Intensität

$$I_t = I_i \frac{(1 - r^2)^2}{(1 + r^4) - 2r^2 \cos \delta} \quad (5.1.27)$$

da das transmittierte Licht sich im gleichen Medium wie das einfallende Licht sich bewegt. Mit $\cos \delta = 1 - 2 \sin^2(\delta/2)$ werden I_i und I_r

$$\begin{aligned} I_r &= I_i \frac{\left[\frac{2r}{1-r^2} \right]^2 \sin^2(\delta/2)}{1 + \left[\frac{2r}{1-r^2} \right]^2 \sin^2(\delta/2)} \quad (5.1.28) \\ I_t &= I_i \frac{1}{1 + \left[\frac{2r}{1-r^2} \right]^2 \sin^2(\delta/2)} \end{aligned}$$

Wir haben dabei angenommen, dass keine Energie absorbiert wird¹. Dann ist $I_i = I_t + I_r$. Ein Maximum in der Transmission erhält man, wenn der Nenner möglichst klein, das heisst, dass $\cos \delta = 1$ ist. Dann ist

$$I_t|_{max} = I_i \quad (5.1.29)$$

und

$$I_r|_{min} = 0 \quad (5.1.30)$$

¹Dies ist bei metallbedampften Spiegeln nicht der Fall.

Umgekehrt ist die Transmission minimal, wenn der Nenner bei I_t maximal ist, also wenn $\cos \delta = -1$ ist

$$I_t|_{min} = I_i \frac{(1 - r^2)^2}{(1 + r^2)^2} \quad (5.1.31)$$

und

$$I_r|_{max} = I_i \frac{4r^2}{(1 + r^2)^2} \quad (5.1.32)$$

Es hat sich eingebürgert, dass *Fabry-Perot-Interferometer* mit der Kennzahl *Finessefaktor* charakterisiert werden:

$$F = \left(\frac{2r}{1 - r^2} \right)^2 \quad (5.1.33)$$

Dann gilt für die Intensitätsverhältnisse

$$\begin{aligned} \frac{I_r}{I_i} &= F \sin^2(\delta/2) / (1 + F \sin^2(\delta/2)) \\ \frac{I_t}{I_i} &= \frac{1}{1 + F \sin^2(\delta/2)} \end{aligned} \quad (5.1.34)$$

wobei die Funktion $[1 + F \sin^2(\delta/2)]^{-1} = \mathcal{A}(\delta)$ auch *Airy-Funktion* genannt wird².

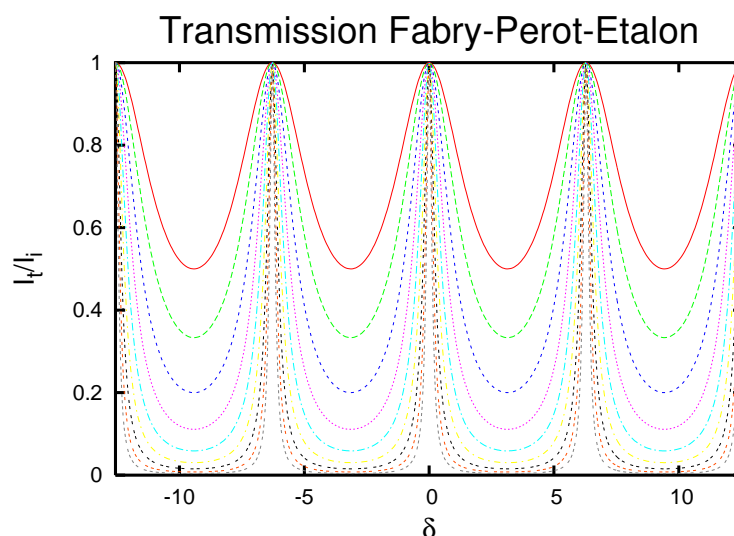


Abbildung 5.5.: Transmission durch ein Fabry-Perot-Etalon in Abhängigkeit von der Finesse F . Von oben nach unten sind die Transmissionskurven für $F = 1$, $F = 2$, $F = 4$, $F = 8$, $F = 16$, $F = 32$, $F = 64$, $F = 128$ und $F = 256$ dargestellt.

²Achtung! Es gibt mehrere Definitionen der Airy-Funktion.

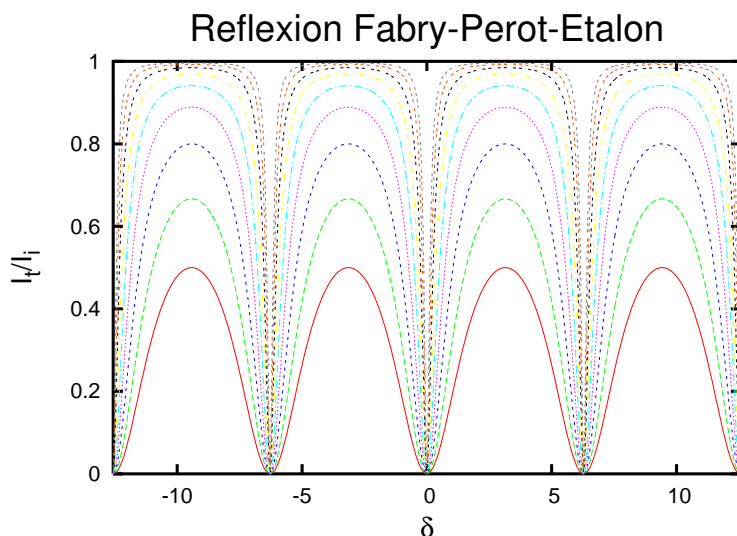


Abbildung 5.6.: Reflexion an einem Fabry-Perot-Etalon in Abhängigkeit von der Finesse F . Von unten nach oben sind die Reflexionskurven für $F = 1$, $F = 2$, $F = 4$, $F = 8$, $F = 16$, $F = 32$, $F = 64$, $F = 128$ und $F = 256$ dargestellt.

Die Halbwertsbreite der Transmissionskurven ist durch

$$\frac{1}{2} = \frac{I_t}{I_i} = \frac{1}{1 + F \sin^2(\delta/2)} \quad (5.1.35)$$

gegeben. Daraus folgt

$$\delta_{1/2} = 2 \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{F}}\right) \quad (5.1.36)$$

Das Verhältnis des Abstandes benachbarter Maxima zu der Halbwertsbreite heisst *Finesse* und ist

$$\mathcal{F} = \frac{\pi \sqrt{F}}{2} \quad (5.1.37)$$

Die einfachsten *Fabry-Perot-Spektrometer* haben ein $\mathcal{F} \approx 30$. Werte von $\mathcal{F} \approx 1000$ sind an der Grenze des technisch machbaren. Wenn bei dem Fabry-Perot-Spektrometer Absorption vorhanden ist, müssen kompliziertere Gleichungen, die Sie zum Beispiel in Hecht [Hec, 617] finden, verwendet werden.

5.2. Wellen in 2 und mehr Dimensionen



(Siehe Gerthsen, Physik [Mes06, pp. 160]) (Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 41])



Versuch zur Vorlesung:

Wellenwanne (Versuchskarte O-021)

Die Wellenfunktion für eine zeitunabhängige Welle in zwei oder drei Dimensionen wird wie

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \Psi_0(\mathbf{x}) \cos[\mathbf{k}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} - \omega t] \quad (5.2.1)$$

für eine longitudinale Welle und

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}_0(\mathbf{x}) \cos[\mathbf{k}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} - \omega t] \quad (5.2.2)$$

für transversale Wellen. \mathbf{A} ist ein Vektor, der auch komplexe Komponenten haben kann (Die komplexen Komponenten geben die Phasen an.). Der Vektor, der aus dem Betrag der einzelnen Komponenten gebildet wird, gibt die Schwingungsrichtung der Welle an. Für eine transversale Welle gilt

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{k}(\mathbf{x}) = 0 \quad (5.2.3)$$

5.2.1. Ebene Wellen

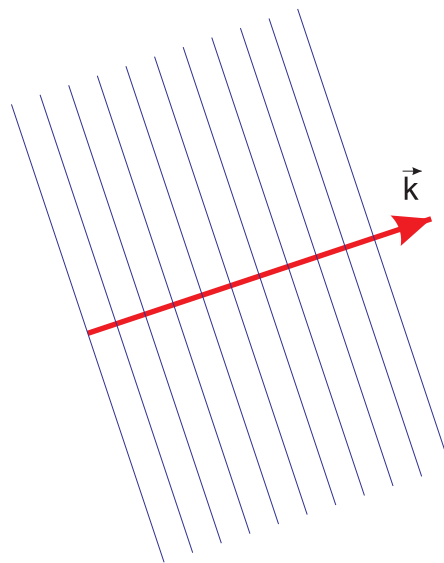


Abbildung 5.7.: Bild einer ebenen Welle

Eine ebene Welle entsteht aus der allgemeinen Wellengleichung dadurch, dass die *Amplitude* und der Wellenvektor nicht vom Ort abhängen. Eine ebene Transversalwelle ist durch

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \quad (5.2.4)$$

eine Longitudinalwelle durch

$$\Psi(\mathbf{x}) = \Psi_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \quad (5.2.5)$$

gegeben. Ebene Wellen können durch einen Vektor, der die Ausbreitungsrichtung anzeigt, dargestellt werden. Bei ebenen Lichtwellen spricht man dann von **Lichtstrahlen**.



5.2.2. Kugelwellen

(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 48, 710]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 287])



Versuch zur Vorlesung:

Wellenwanne (Versuchskarte O-021)

Eine weitere häufig vorkommende Form von Wellen sind die Kugelwellen. Wir können die Amplitudenabhängigkeit durch folgende Überlegung erhalten.

- Wir denken uns eine Kugeloberfläche um die Quelle, wobei die Quelle im Mittelpunkt der Kugel sein soll.
- Der Energiefluss pro Zeit, die Leistung, die durch die gesamte Kugeloberfläche fließt ist konstant, unabhängig vom Radius der Kugel.
- Damit diese Gleichung für alle r gilt muss $A(r) = A_0 \frac{r_0}{r}$ sein.

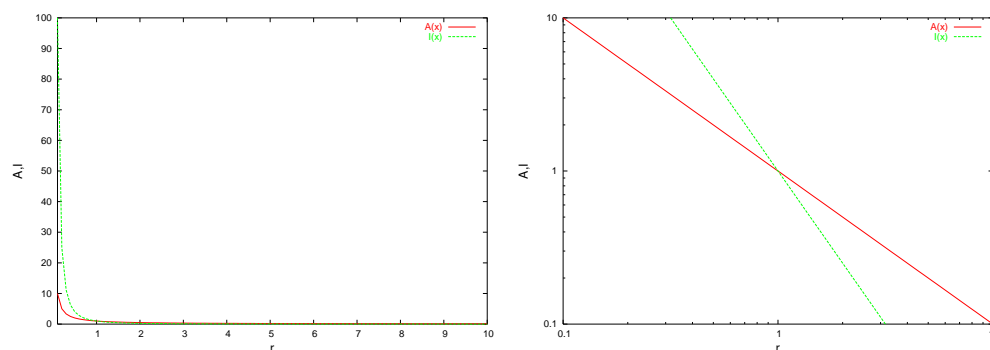


Abbildung 5.8.: *Amplitude* und *Intensität* einer Kugelwelle in Abhängigkeit der Distanz r von der Quelle. Links eine lineare, rechts eine logarithmische Darstellung.

Bei einer Kugelwelle ist

- die *Amplitude*: $A(r) = A_0 \frac{r_0}{r}$
- die *Intensität* $I(r) = I_0 \frac{r_0^2}{r^2}$



Versuch zur Vorlesung:

Moire-Modell der Interferenz von Kugelwellen (Versuchskarte O-019)

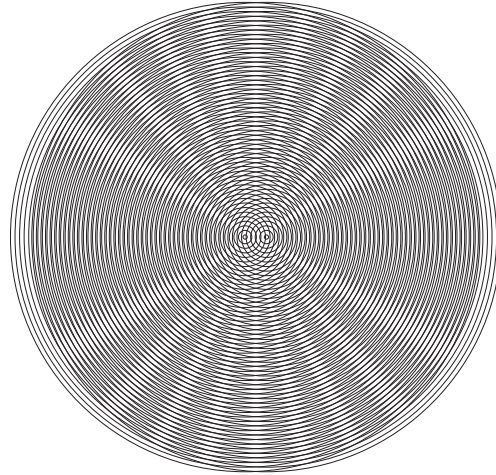
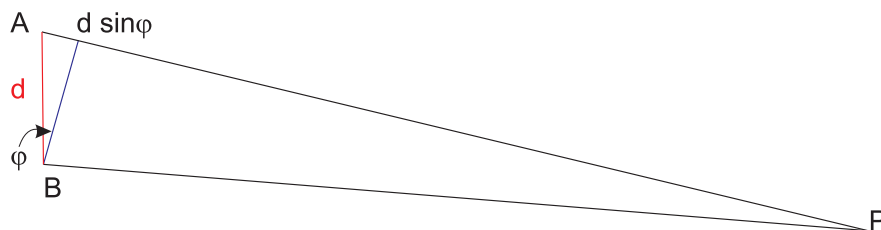


Abbildung 5.9.: Interferenz bei Moire-Mustern

Der erste Summand beschreibt die Interferenz, während der zweite die nur vorhanden ist, wenn die beiden Amplituden E_1 und E_2 verschieden sind.

Abbildung 5.10.: Interferenz zweier Wellen aus A und B

Aus der Zeichnung ist ersichtlich, dass der Weglängenunterschied von A nach P und von B nach P $\Delta\ell = d \sin \varphi$ ist. Aus Gleichung (5.1.1) wissen wir, dass konstruktive Interferenz auftritt, wenn

$$\sin \varphi = \frac{n\lambda}{d} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.2.6)$$

ist. In der *paraxialen Näherung* (kleine φ) gilt auch

$$\varphi = \frac{n\lambda}{d} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.2.7)$$

Interferenzminima treten bei

$$\sin \varphi = \frac{(n + 1/2)\lambda}{d} \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.2.8)$$

oder, in der *paraxialen Näherung* (kleine ϕ), bei

$$\varphi = \frac{(n + 1/2)\lambda}{d} \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.2.9)$$

Die Lage der *Interferenzextrema* hängen von der Wellenlänge ab.

5.3. Interferenzmuster an einem Doppelspalt



(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 572]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 358]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1116])



Versuch zur Vorlesung:

Beugung am Doppelspalt (Versuchskarte O-123)

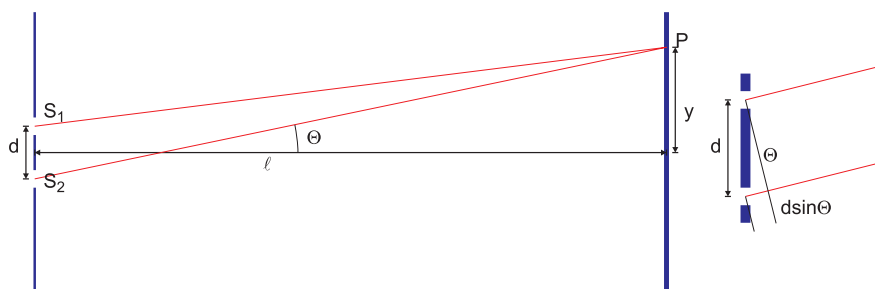


Abbildung 5.11.: Strahlengang bei einem Doppelspalt

Aus den Interferenzbedingungen wissen wir, dass wir

konstruktive Interferenz (helle Streifen) bei

$$d \sin \Theta = m\lambda \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.3.1)$$

destruktive Interferenz (dunkle Streifen) bei

$$d \sin \Theta = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.3.2)$$

haben. Wir berechnen nun den Verlauf der *Intensität*.

Am Punkt P ist die Phasendifferenz

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \Theta \quad (5.3.3)$$

Der m -te helle Streifen hat von der Achse den Abstand y_m . Nach der Skizze ist der Winkel dann durch

$$\tan \Theta = \frac{y_m}{\ell} \quad (5.3.4)$$

gegeben. Wir verwenden, dass für kleine Winkel Θ gilt: $\tan \Theta \approx \sin \Theta \approx \Theta$. Damit folgt

$$d \sin \Theta \approx d \tan \Theta = d \frac{y_m}{\ell} \approx m\lambda \quad (5.3.5)$$

Der m -te helle Streifen liegt also bei

$$y_m \approx m \frac{\lambda \ell}{d} \quad (5.3.6)$$

Der Abstand zweier Streifen ist

$$\Delta y = \frac{\lambda \ell}{d} \quad (5.3.7)$$

Wenn wir die Amplituden der Felder verwenden (die elektrischen Felder E), können wir sagen, dass die beiden Felder $E_1 = E_0 \sin(\omega t)$ und $E_2 = E_0 \sin(\omega t + \delta)$ am Punkt P interferieren.

$$E = E_1 + E_2 = E_0 \sin(\omega t) + E_0 \sin(\omega t + \delta) \quad (5.3.8)$$

Mit $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ bekommt man

$$E = 2E_0 \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \sin\left(\omega t + \frac{\delta}{2}\right) \quad (5.3.9)$$

Die *Intensität* ist dann

$$I = 4n \frac{\epsilon_0 c}{2} E_0^2 \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) = 2n\epsilon_0 c E_0^2 \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \quad (5.3.10)$$

wobei n der Brechungsindex des Mediums ist. Mit $d \sin \Theta \approx yd/\ell$ wird die Phase

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \Theta \approx \frac{2\pi}{\lambda} \frac{yd}{\ell} \quad (5.3.11)$$

und

$$I(y) \approx 2n\epsilon_0 c I_0 \cos^2\left(\frac{\pi yd}{\lambda \ell}\right) \quad (5.3.12)$$

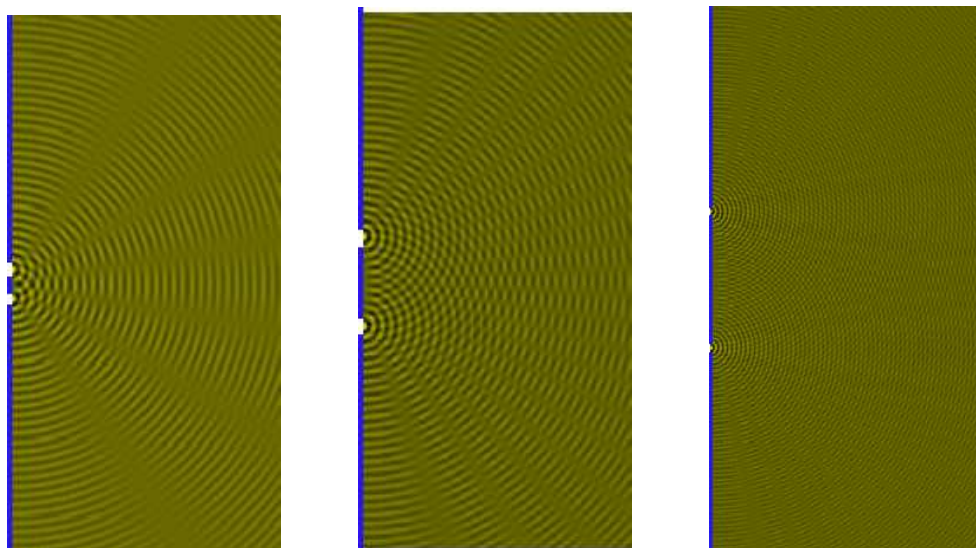


Abbildung 5.12.: Beugung an einem Doppelspalt. Links ist $d = 3\lambda$, in der Mitte $d = 10\lambda$ und rechts $d = 30\lambda$ (rechts ist der gezeigte Bildausschnitt grösser).

Die Interferenz an einem Doppelspalt hängt von der Polarisationsrichtung ab.



Versuch zur Vorlesung:

Interferenz mit Polarisation (Versuchskarte AT-051)



5.4. Vektoraddition von harmonischen Wellen

(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 420]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1120])

Wir betrachten zwei Wellen

$$E_1 = \hat{E}_1 \sin(\omega t) \quad E_2 = \hat{E}_2 \sin(\omega t + \delta) \quad (5.4.1)$$

Beide Schwingungen haben die gleiche Frequenz: die Zeiger der Schwingung behalten ihre relative Stellung und rotieren gemeinsam. Die Summe muss sein

$$E_1 + E_2 = \hat{E}_1 \sin(\omega t) + \hat{E}_2 \sin(\omega t + \delta) = E' = \hat{E}' \sin(\omega t + \delta') \quad (5.4.2)$$

Wir legen die "1"-Achse so, dass der Vektor E_1 entlang dieser Achse ist. Die Komponenten von E_2 sind entlang der "1"-Achse $E_{2,1} = \hat{E}_2 \cos \delta$ und entlang der "2"-Achse $E_{2,2} = \hat{E}_2 \sin \delta$. Damit sind die Komponenten

$$\begin{aligned} E'_1 &= \hat{E}_1 + \hat{E}_2 \cos \delta \\ E'_2 &= \hat{E}_2 \sin \delta \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

Damit ist

$$E' = \sqrt{E_1'^2 + E_2'^2} = \sqrt{(\hat{E}_1 + \hat{E}_2 \cos \delta)^2 + (\hat{E}_2 \sin \delta)^2} \quad (5.4.4)$$

oder

$$E' = \sqrt{\hat{E}_1^2 + 2\hat{E}_1\hat{E}_2 \cos \delta + \hat{E}_2^2} \quad (5.4.5)$$

Die Phase ist

$$\tan \delta' = \frac{E_2'}{E_1'} = \frac{\hat{E}_2 \sin \delta}{\hat{E}_1 + \hat{E}_2 \cos \delta} \quad (5.4.6)$$

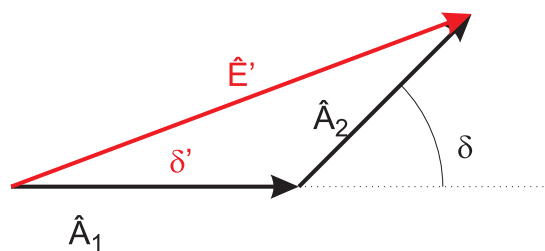


Abbildung 5.13.: Grafische Darstellung der Vektoraddition



5.5. Interferenzmuster bei drei und mehr äquidistanten Quellen

(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 609]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1122])



Versuch zur Vorlesung:

Interferenz am Glimmerplättchen (Versuchskarte)

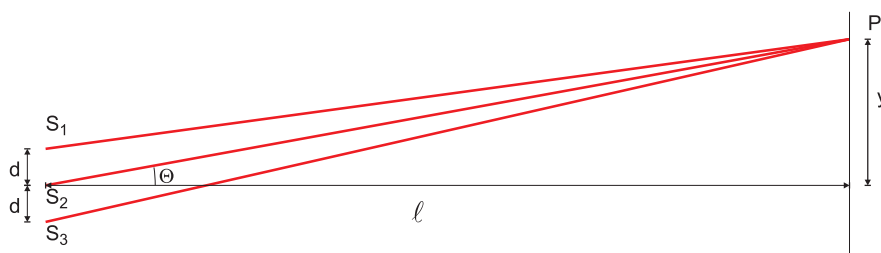


Abbildung 5.14.: Interferenz von drei Quellen

Die folgenden drei *paraxialen Wellen* interferieren im Punkt P .

$$\begin{aligned} E_1 &= E_0 \sin(\omega t) \\ E_2 &= E_0 \sin(\omega t + \delta) \\ E_3 &= E_0 \sin(\omega t + 2\delta) \end{aligned} \quad (5.5.1)$$

Die Phasendifferenz ist, wie bei zwei Quellen³

$$\delta = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \Theta \approx \frac{2\pi y d}{\lambda \ell} \quad (5.5.2)$$

Für $\Theta = 0$ sind alle drei Wellen in Phase. Wir haben ein Maximum. Das erste Nebenmaximum entsteht, wenn $\delta = 2\pi/3$ ist, und nicht bei $\delta = \pi$ wie bei zwei interferierenden Wellen. Der Winkel Θ des ersten Nebenmaximums ist also grösser.

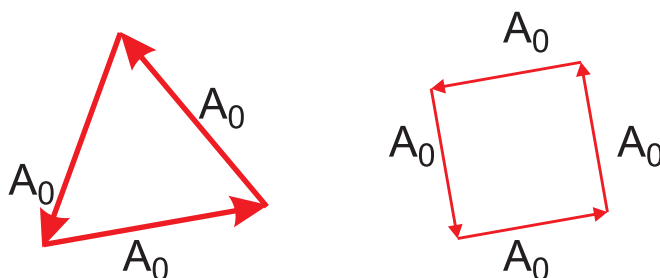


Abbildung 5.15.: Vektordiagramm für die Interferenz von drei Wellen (links) und vier Wellen (rechts).

Die Maxima liegen wieder bei

$$d \sin \Theta = m\lambda \quad m = 0, \pm 1, \pm 2 \quad (5.5.3)$$

Die Maxima sind schärfer und intensiver als bei einer Welle.

³ $\sin \Theta \approx \tan \Theta \approx \Theta$

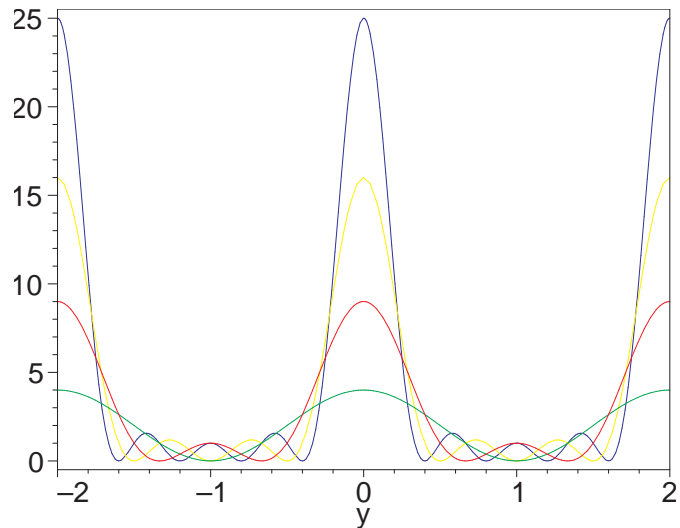


Abbildung 5.16.: Interferenzmuster für zwei bis fünf *Punktquellen*, nicht normiert.

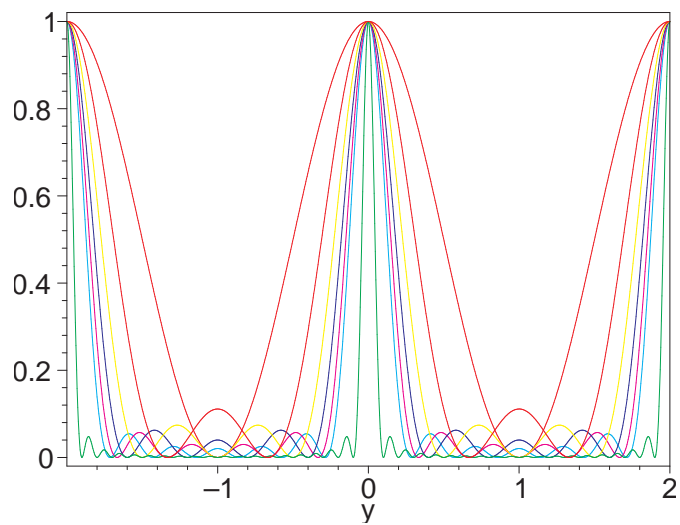


Abbildung 5.17.: Interferenzmuster für zwei bis sieben sowie 20 *Punktquellen*, normiert

5.6. Interferenz an dünnen Schichten

(Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1111])

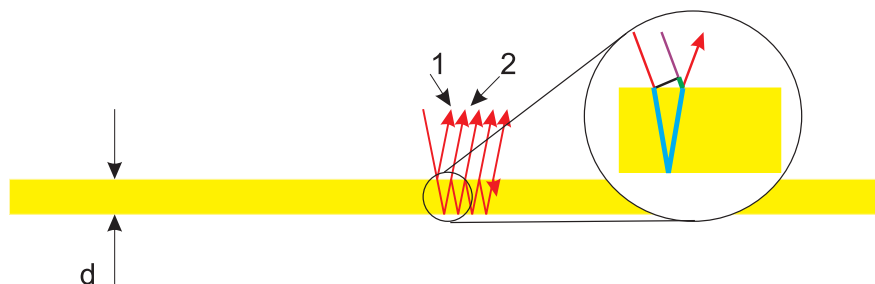


Abbildung 5.18.: Interferenz an dünnen Schichten

Wir betrachten eine dünne Schicht der Dicke n mit dem *Brechungsindex* n in Luft. Dabei nehmen wir an, dass das Licht fast senkrecht auf die Grenzfläche auftritt. Die Phase des Strahls 1, der an der oberen Grenzfläche reflektiert wird, wird bei der *Reflexion* um π gedreht. Der Strahl 2, der an der unteren Grenzfläche reflektiert wird, unterliegt keinem Phasensprung. In der dünnen Schicht ist die Wellenlänge kleiner, $\lambda' = \lambda/n$. Wir müssen für die Interferenz den Weg in der Schicht doppelt zählen. Zusätzlich muss die Phase des zweiten interferierenden Lichtstrahls an der Luft (grün eingezeichnet) berücksichtigt werden. Die Phase bei senkrechtem Einfall ist durch den Laufzeitunterschied $\Delta t = \frac{d}{c} = \frac{nd}{c}$ im Glas gegeben. Deshalb kann man auch mit dem optischen Weg

$$\delta\ell = 2nd \quad (5.6.1)$$

rechnen. Bei schrägem Einfall (Winkel Θ zur Normalen) ist der zurückgelegte Weg $\ell(\Theta) = \frac{2d}{\cos\Theta'}$, da ja das Brechungsgesetz gelten muss. Mit $\cos\Theta' = \sqrt{1 - \sin^2\Theta'} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\Theta}{n^2}}$. Diese Größe ersetzt das d in der obigen Rechnung, so dass wir $\ell(\Theta) = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\Theta}$ erhalten. Zusätzlich ist in der Luft der zurückgelegte Weg (grün) $d_1 = 2d \tan(\theta) \sin\Theta$ (mit $n \sin\theta = \sin\Theta$). Berücksichtigen wir noch den Phasensprung bei der *Reflexion* an der oberen Grenzschicht, so erhalten wir

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2\Theta} = m\lambda \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5.6.2)$$

destruktive Interferenz

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2\Theta} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5.6.3)$$

konstruktive Interferenz



Versuch zur Vorlesung:

Newtonsche Ringe (Versuchskarte O-017)

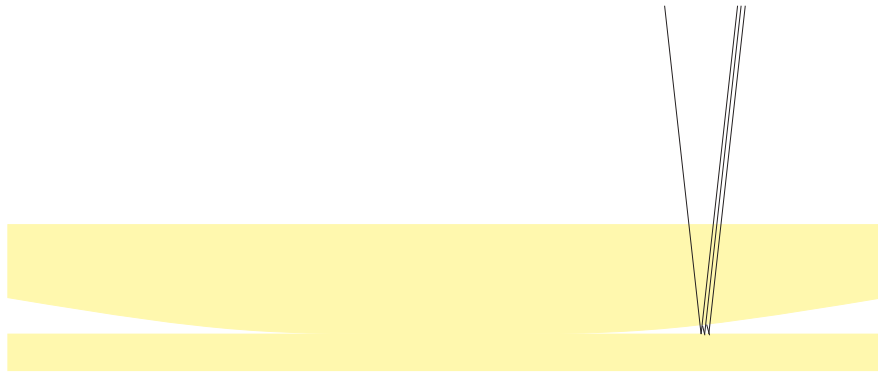


Abbildung 5.19.: Querschnitt durch eine *Linse* auf einem Glasplättchen, bei dem Newtonsche Ringe auftreten.

Wenn zwei Glasplatten sich mit einem sehr kleinen Luftspalt gegenüber liegen, und monochromatisches Licht senkrecht auf die Platten fällt, so treten die Newtonschen Ringe auf. Dabei tritt ein Phasensprung von π bei der *Reflexion* an der unteren Platte auf. Auch hier gelten die Gleichungen (5.6.2) und (5.6.3);

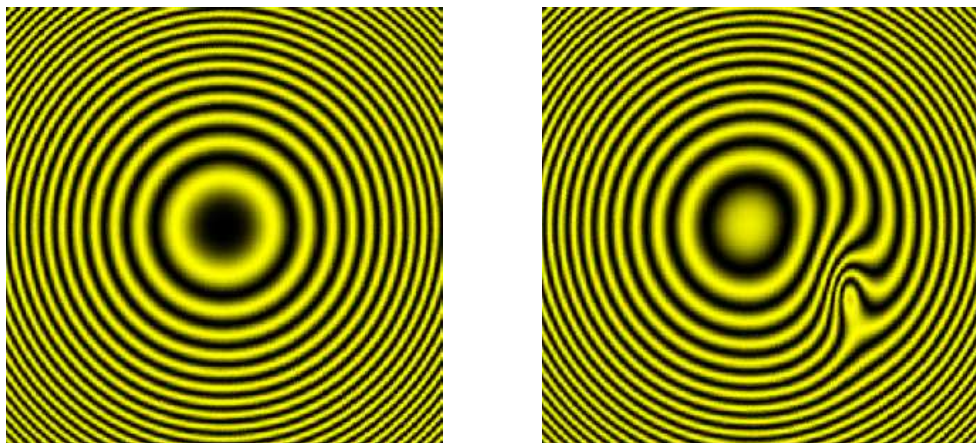


Abbildung 5.20.: Newtonsche Ringe (rechts mit einem Fehler).

Bei dünnen Schichten mit einem niedrigen *Brechungsindex* zwischen zwei Schichten mit einem höheren *Brechungsindex* tritt Auslöschung für die *Reflexion* auf. Damit können reflexmindernde Schichten erzeugt werden.

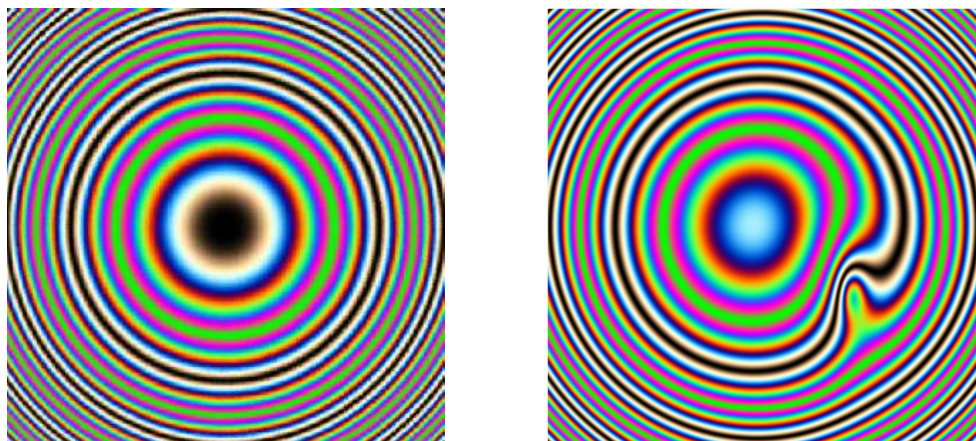


Abbildung 5.21.: Newtonsche Ringe bei weissem Licht (rechts mit einem Fehler).

In der oben stehenden Abbildung werden die Newtonschen Ringe bei weissem Licht durch die Überlagerung dreier Ringsysteme mit rotem Licht ($\lambda = 6/5$), grünem Licht ($\lambda = 1$) und blauem Licht ($\lambda = 4/5$) simuliert. Es treten nun farbige Ringe auf.

5.7. Beugungsmuster an einem Einzelspalt



(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 650,663]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1125])
 (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 341])



Versuch zur Vorlesung:

Beugung am Einzelspalt (Versuchskarte O-050)

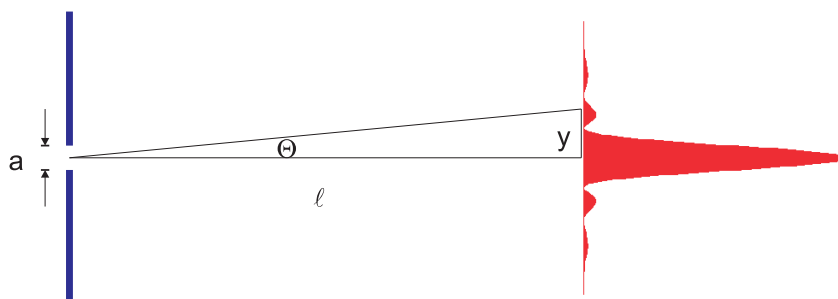


Abbildung 5.22.: Berechnung des Beugungsmusters an einem Einzelspalt.

Wir definieren den Winkel Θ genau so wie in der Zeichnung



5.7.1. Berechnung der Intensitätsverteilung

(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 663]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1127])
 Wir betrachten $N + 1$ punktförmige Lichtquellen in einem Spalt der Breite a . Ihr Abstand ist $d = a/N$. Der Phasenunterschied zwischen zwei Lichtquellen in die Richtung Θ ist

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \Theta \quad (5.7.1)$$

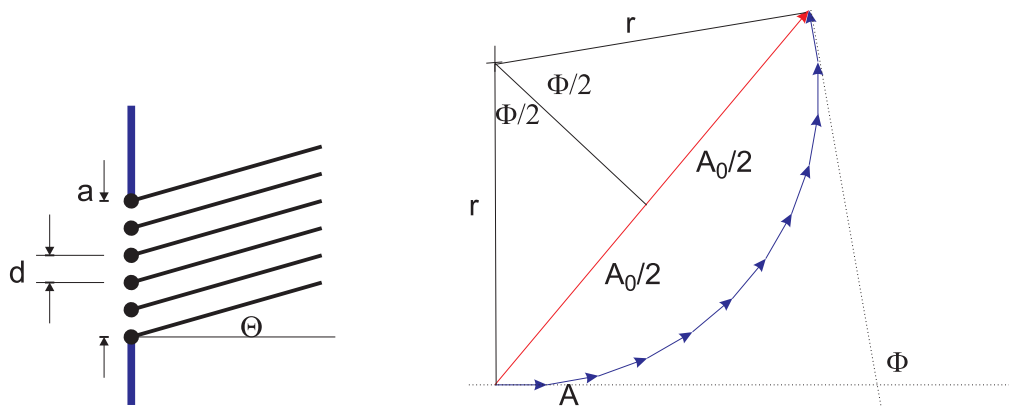


Abbildung 5.23.: Definition der Größen. Rechts ist die Berechnung der *Amplitude* gezeigt.

Der gesamte Phasenunterschied ist

$$\Phi = \sum_{k=0}^N \delta = (N + 1) \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \Theta = \frac{N + 1}{N} \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \Theta \quad (5.7.2)$$

Für $N \rightarrow \infty$ ist

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \Theta \quad (5.7.3)$$

Wie hängt nun die *Amplitude* von Φ ab?

Die *Amplitude* E_0 resultiert aus der Addition von $N + 1$ Einzelamplituden E . Aus der Abbildung ist ersichtlich, dass

$$E_0 = 2r \sin \left(\frac{\Phi}{2} \right) \quad (5.7.4)$$

Für den Winkel $\Theta = 0$ ist $A_{max} = A(\Phi = 0) = N \cdot A$. Die Amplituden der einzelnen Quellen sind unabhängig von der Beobachtungsrichtung. Deshalb ist auch die Bogenlänge $A_{max} = N \cdot E = r\Phi$. Wir lösen nach r auf und setzen ein.

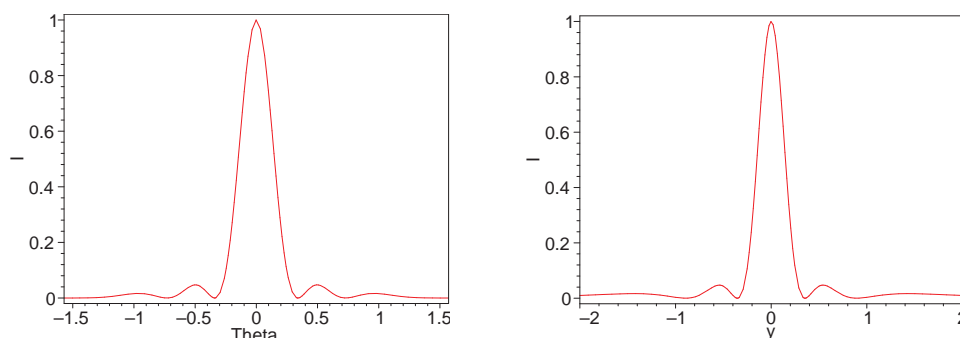
$$E_0 = 2 \frac{E_{max}}{\Phi} \sin \left(\frac{\Phi}{2} \right) = \frac{E_{max}}{\frac{\Phi}{2}} \sin \left(\frac{\Phi}{2} \right) \quad (5.7.5)$$

Wenn wir berücksichtigen, dass $I = \frac{n}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E^2$ ist und wir $I_0 = \frac{n}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_{max}^2$ setzen, erhalten wir für die *Intensität*

$$I = I_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{\Phi}{2}\right)}{\frac{\Phi}{2}} \right)^2 \quad (5.7.6)$$

Wenn wir Φ einsetzen, bekommen wir

$$I = I_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} a \sin \Theta\right)}{\frac{\pi}{\lambda} a \sin \Theta} \right)^2 \quad (5.7.7)$$



Beugungsmuster

Abbildung 5.24.: Beugungsmuster als Funktion des Ablenkwinkels

als Funktion des Ablenkwinkels und, rechts, als Funktion des Abstandes von der optischen Achse.

Wir können mit $\Theta(y) = \arctan \frac{y}{\ell}$ das *Beugungsmuster* für einen ebenen Schirm berechnen. Soll das *Beugungsmuster* in Funktion von Θ betrachtet werden, muss es mit einer Sammellinse (Gitter im *Brennpunkt*) betrachtet werden.

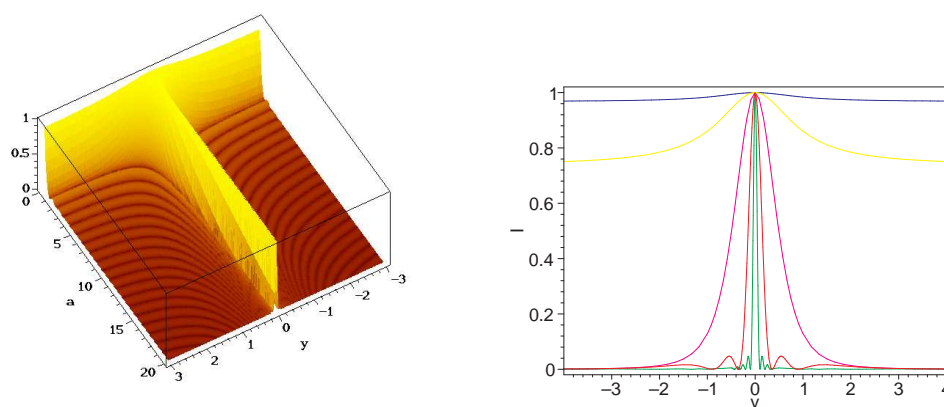


Abbildung 5.25.: *Beugungsmuster* als Funktion der Spaltbreite. Links kontinuierlich und rechts für die Breiten $a = 0.1, 0.3, 1, 3, 10$

Die Lage der Beugungsmaxima und -minima ist gegeben durch $\Phi/2 = k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ für die Minima und $\Phi/2 = (k + 1/2)\pi$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ sowie $\Phi = 0$ für die Maxima.

$$\begin{aligned}\Theta_{max} &= 0 \\ \Theta_{max,n} &\approx \arcsin\left(\frac{\lambda(k+1/2)}{a}\right) \quad k \in \mathbb{N} \\ \Theta_{max,-n} &\approx \arcsin\left(\frac{\lambda(-k-1/2)}{a}\right) \quad k \in \mathbb{N} \\ \Theta_{min,n} &= \arcsin\left(\frac{\lambda k}{a}\right) \quad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}\quad (5.7.8)$$

Die *Amplitude* in den Nebenmaxima $\Theta_{max,n}$ bekommt man durch Ableitung und auf Null setzen. Ungefähr liegen diese Maxima in der Mitte zwischen den Minima. Die *Amplitude* ist dort ungefähr

$$E_{max,n} = E_0 \frac{\sin((k + 1/2)\pi)}{(k + 1/2)\pi} \approx \frac{E_0}{(k + 1/2)\pi} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.7.9)$$

Damit gilt für die Intensitäten der Nebenmaxima

$$I_{max,n} = \frac{I_0}{[(k + 1/2)\pi]^2} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.7.10)$$

Winkel	Art	Amplitude bezogen auf I_0
0	Maximum	1
$\pm\pi$	Minimum	0
$\pm 3\pi/2$	Maximum	$\frac{4}{9\pi^2}$
$\pm 2\pi$	Minimum	0
$\pm 5\pi/2$	Maximum	$\frac{4}{25\pi^2}$
$\pm 7\pi/2$	Maximum	$\frac{4}{49\pi^2}$
$\pm 9\pi/2$	Maximum	$\frac{4}{81\pi^2}$

Tabelle 5.2.: Lage der Minima und Maxima

Die genaue Lage der Minima kann man durch

$$0 = \frac{\partial}{\partial \Phi} \left[\frac{\sin(\Phi/2)}{\Phi/2} \right]^2 = 4 \frac{\sin(\Phi/2) \cos(\Phi/2)}{\Phi^2} - 8 \frac{\sin^2(\Phi/2)}{\Phi^3} \quad (5.7.11)$$

oder vereinfacht

$$0 = \sin\left(\frac{\Phi}{2}\right) \left[\frac{\Phi}{2} \cos(\Phi) - 2 \sin\left(\frac{\Phi}{2}\right) \right] \quad (5.7.12)$$

Nullstellen gibt es für

$$\begin{aligned}\Phi &= 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ \Phi &= \tan(\Phi/2)\end{aligned}\quad (5.7.13)$$

5.8. Interferenz- und *Beugungsmuster* beim Doppelspalt



(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 670]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1130])



Versuch zur Vorlesung:

Beugung am Doppelspalt (Versuchskarte O-123)

Bei Doppelspalten oder bei Gittern mit N Linien setzt sich das *Beugungsmuster* aus dem Muster des Einzelspaltes multipliziert mit dem *Beugungsmuster* des Gitters zusammen.

Da die charakteristische Länge des Einzelspaltes kleiner ist als die Gitterperiode, ist das *Beugungsmuster* des Einzelspaltes breiter als das des Gitters. Die Beugungsfunktion des Einzelspaltes gibt die Umhüllende des Beugungsmusters.

Wir hatten für das *Beugungsmuster* des Doppelspalts mit linienförmigen Spalten

$$I = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{\delta}{2} \right) \quad (5.8.1)$$

wenn wir $n = 1$ setzen. Das gesamte *Beugungsmuster* ist dann durch

$$I(\Theta) = 4I_0 \left(\frac{\sin \left(\frac{\Phi(\Theta)}{2} \right)}{\frac{\Phi(\Theta)}{2}} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{\delta(\Theta)}{2} \right) \quad (5.8.2)$$

wobei $\Phi(\Theta) = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \Theta$ und $\delta(\Theta) = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \Theta$ sind mit a der Spaltbreite und d dem Abstand der beiden Spalte. Wir können nun noch mit $\Theta(y) = \arctan \frac{y}{\ell}$ das *Beugungsmuster* für einen ebenen Schirm berechnen.

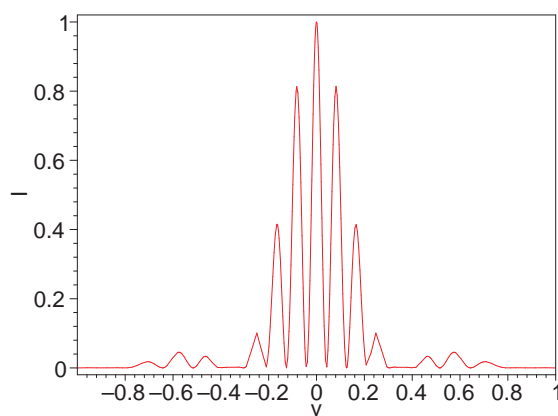


Abbildung 5.26.: Beugung an einem Doppelspalt mit dem Spaltabstand $d = 6$ und der Spaltbreite $a = 3$.

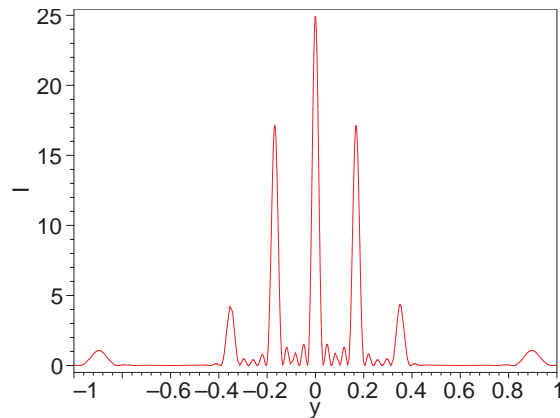


Abbildung 5.27.: Beugung an einem 5-fach Spalt mit dem Spaltabstand $d = 3$ und der Spaltbreite $a = 2$



5.9. Fraunhofersche und Fresnelsche Beugung

(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 650, 710]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1131])
 (Siehe Sommerfeld, Theoretische Physik Band IV, Optik [Som78, pp. 206])

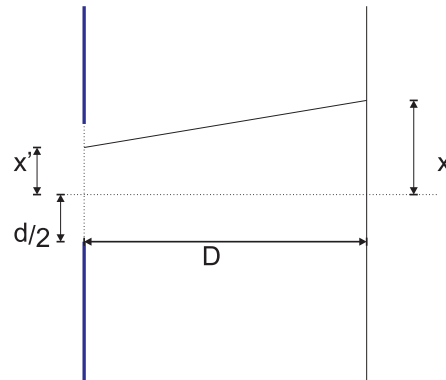


Abbildung 5.28.: Berechnung der Fresnelbeugung an einer Halbebene.

Bei der Beugung interferiert Licht von Kugelwellen aus allen Punkten mit den Koordinaten x' im Beobachtungspunkt mit der Koordinate x . Für eine einzelne Teilwelle ist der Weg

$$s = \sqrt{D^2 + (x - x')^2} \quad (5.9.1)$$

Entsprechend ist die komplexe *Amplitude* am Punkt x gegeben durch

$$\Phi(x, x') = \frac{\Phi_0}{s(x, x')} e^{i \cdot 2\pi s(x, x')/\lambda} \quad (5.9.2)$$

Die *Amplitude* am Punkt x ist dann nach Huygens

$$\Phi(x) = \int_{-d/2}^{d/2} \frac{\Phi_0}{s(x, x')} e^{i \cdot 2\pi s(x, x')/\lambda} dx' \quad (5.9.3)$$

da wir Kugelwellen haben. Diese Gleichung kann numerisch gelöst werden. Es existieren die folgenden Näherungen:



5.9.1. Fresnelsche Näherung

(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 710]) (Siehe Sommerfeld, Theoretische Physik Band IV, Optik [Som78, pp. 206])

Wir betrachten nur Orte, bei denen $|x - x'| \ll D$ sind. Dann ist

$$s \approx D + \frac{(x - x')^2}{2D} \quad (5.9.4)$$

und $1/s \approx 1/D$. Das heisst auch, dass die Phase ist proportional zu $(x - x')^2$. Unser Integral wird dann

$$\Phi(x) = \frac{\Phi_0}{D} \int_{-d/2}^{d/2} e^{i \cdot 2\pi s(x, x')/\lambda} dx' = \frac{\Phi_0}{D} \int_{-d/2}^{d/2} e^{i \cdot 2\pi [D + (x' - x)^2/2D]/\lambda} dx' \quad (5.9.5)$$

und

$$\Phi(x) = \frac{\Phi_0}{D} \int_{-d/2}^{d/2} e^{i \cdot 2\pi D/\lambda} e^{i \cdot 2\pi (x' - x)^2/2D\lambda} dx' = \frac{\Phi_0}{D} e^{i \cdot 2\pi D/\lambda} \int_{-d/2}^{d/2} e^{i \cdot 2\pi (x' - x)^2/2D\lambda} dx' \quad (5.9.6)$$

Mit der Variablentransformation $\xi = x' - x$ und damit den Grenzen $\xi_u = -d/2 - x$ und $\xi_o = d/2 - x$ wird das Integral zu

$$\Phi(x) = \frac{\Phi_0}{D} e^{i \cdot 2\pi D/\lambda} \int_{-d/2-x}^{d/2-x} e^{i \cdot 2\pi \xi^2/2D\lambda} d\xi \quad (5.9.7)$$

Das verbleibende Integral $\int_{-d/2-x}^{d/2-x} e^{i \cdot 2\pi \xi^2/2D\lambda} d\xi$ kann als Summe und Differenz der Fresnelschen Integrale geschrieben werden. Wir verwenden, dass $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ ist.

Dieses Integral, nach Real- und Imaginärteil aufgetrennt und normiert ergibt die Fresnelschen Integrale

$$\begin{aligned} C(w) &= \int_0^w \cos\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right) d\tau \\ S(w) &= \int_0^w \sin\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right) d\tau \end{aligned} \quad (5.9.8)$$

Die Funktion $\Phi(x)$ kann als Differenz zweier Fresnelscher Integrale geschrieben werden

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= K [C((d/2 - x) \cdot k) - C((-d/2 - x) \cdot k)] \\ &\quad + i \cdot K [S((d/2 - x) \cdot k) - S((-d/2 - x) \cdot k)] \end{aligned} \quad (5.9.9)$$

wobei K eine von der Intensität abhängige Konstante ist.

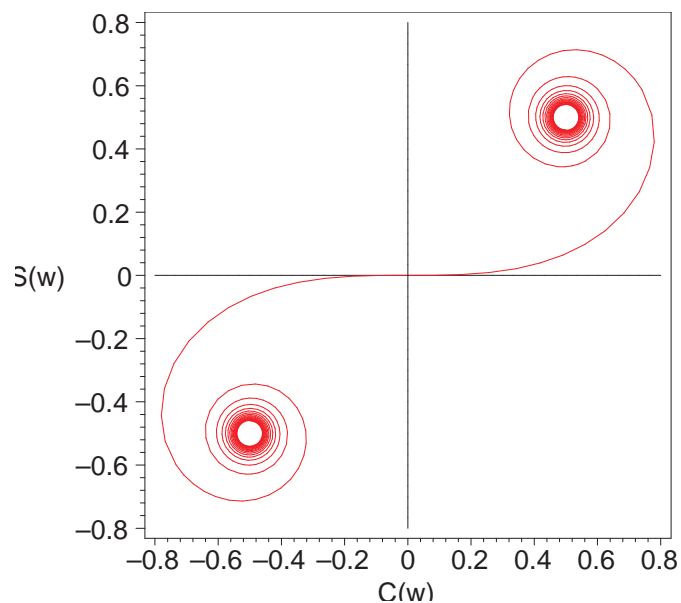


Abbildung 5.29.: Die Cornu-Spirale. Aufgetragen ist die parametrische Kurve $(C(w), S(w))$ mit $-\infty \leq w \leq \infty$. Die linke untere Spirale entspricht $w = -\infty$, die rechte obere Spirale $w = \infty$.

Die durch $F(w) = C(w) + iS(w)$ definierte Ortskurve ist die *Cornu-Spirale*. Diese e -Funktion beschreibt eine längentreue Abbildung der reellen Achse w auf die komplexe C, S -Ebene. Mit dieser Konstruktion kann auf einfachem graphischem Wege das *Beugungsmuster* konstruiert werden. Dazu zeichnet man vom Ortspunkt der unteren Integrationsgrenze zum Ortspunkt der oberen Integrationsgrenze eine Linie. Deren Länge gibt die *Amplitude*, deren Winkel zur reellen Achse die Phase. Damit kann das Fresnel-Beugungsbild eines Spalts berechnet werden.

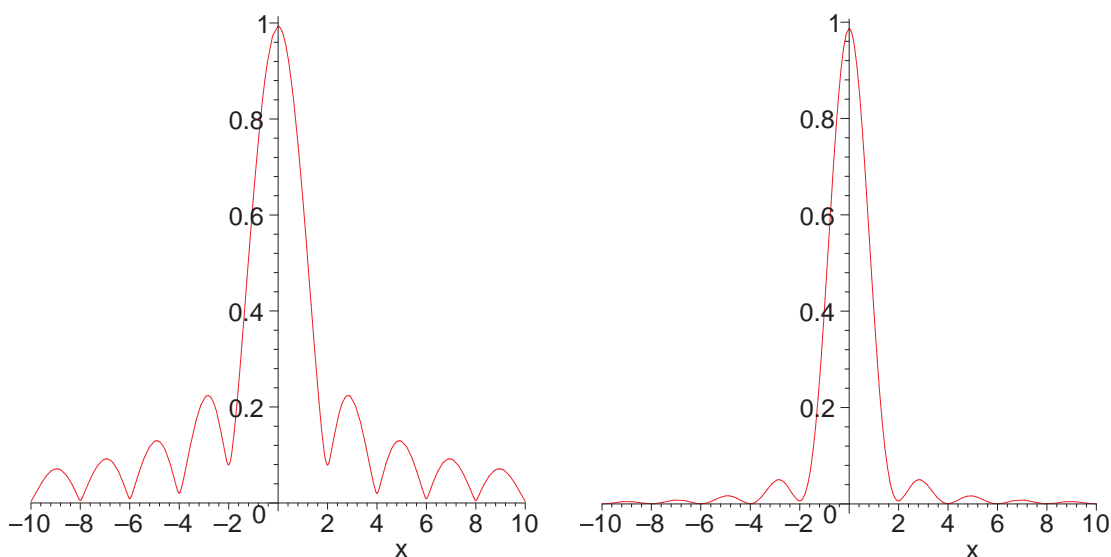


Abbildung 5.30.: Fresnelsches *Beugungsmuster* an einem Spalt der Breite 1. Links die *Amplitude* und rechts die *Intensität*.

Wenn man die untere Integrationsgrenze nach $-\infty$ gehen lässt und bei der oberen Integrationsgrenze d gegen Null gehen lässt, bekommt man das Beugungsbild an einer Kante. Wir tragen nun die Strecke vom Zentrum der linken Spirale ($F(-\infty) = -1/2(1+i)$) aus zum Ursprung korrespondierend zu x ab. Wir sehen, dass im Schattenbereich (bis der bewegliche Ursprung $0, 0$ erreicht) die *Amplitude* monoton zunimmt. Dann beginnt eine Oszillation, die als die Interferenzmuster im hellen Bereich beobachtet werden kann.

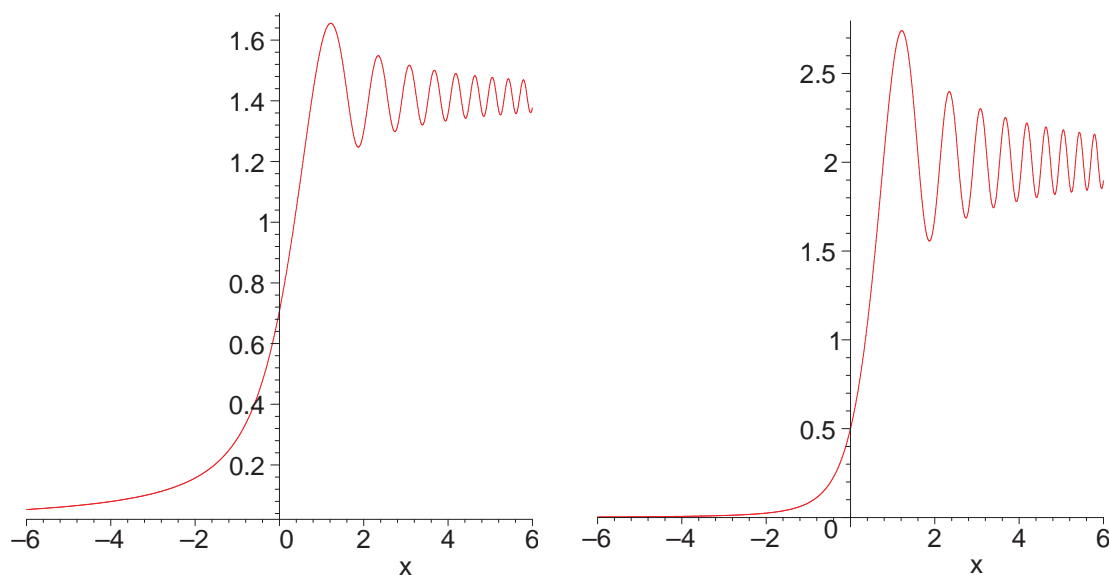


Abbildung 5.31.: Fresnelsches *Beugungsmuster* an einer Halbebene. Links die *Amplitude* und rechts die *Intensität*.

5.9.2. Fraunhofer-Beugung

Die Gleichung (5.9.4) kann weiter vereinfacht werden, wenn $|x'| \ll |x|$ ist. Dann bekommen wir

$$s \approx D + \frac{x^2 - 2x \cdot x'}{2D} = D + \frac{x^2}{2D} - \frac{x}{D}x' \quad (5.9.10)$$

Nun ist die optische Distanz s eine lineare Funktion von x' . Die Approximation gilt nur, wenn das Beugungsobjekt klein gegen die Distanz zu Objekt und der Grösse des Beugungsmusters ist. Diese Fernfeld-Approximation nennt man die *Fraunhofer-Näherung*.



5.9.3. Vergleich

(Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 327])

Die bis jetzt besprochenen Beugungseffekte haben die folgenden Eigenschaften:

Fraunhofersche Beugung

1. Ebene Wellen fallen so auf einen Spalt, dass ihre Strahlen senkrecht auf ihn treffen. Damit sind die Amplituden und die Phasen der nach dem Huygensschen Prinzip emittierten Wellen gleich.
2. Das Beugungsbild wird auf einem weit entfernten Schirm beobachtet. Die von *Punktquellen* ausgehenden Strahlen treffen ungefähr parallel auf den Schirm.

Ist eine der obigen Bedingungen nicht erfüllt, spricht man von *Fresnelscher Beugung*. Eine andere Formulierung der Bedingungen der Fraunhoferschen Beugung ist

1. Der Abstand R von der Quelle zum Beugungsobjekt ist sehr viel grösser als die charakteristische Länge d des Beugungsobjekts.
2. Der Abstand R' vom Beobachter zum Beugungsobjekt ist sehr viel grösser als die charakteristische Länge d des Beugungsobjekts.

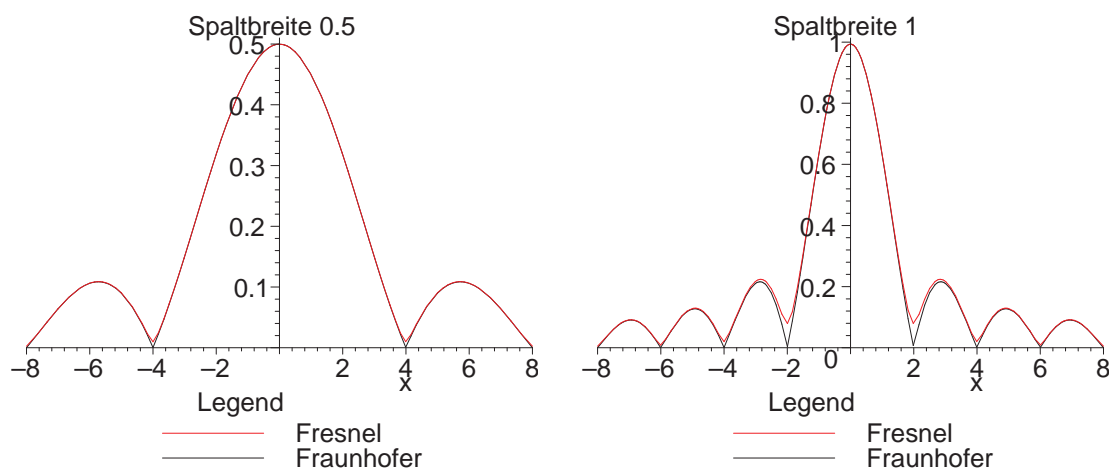


Abbildung 5.32.: Vergleich der Fresnelbeugung (rot) mit der Fraunhoferbeugung (schwarz) für Spaltweiten von 0.1 und 1.

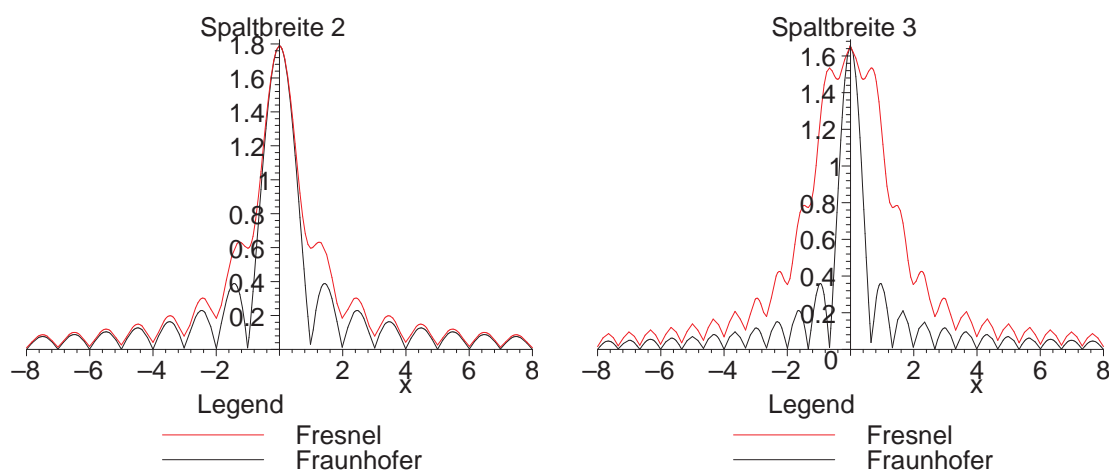


Abbildung 5.33.: Vergleich der Fresnelbeugung (rot) mit der Fraunhoferbeugung (schwarz) für Spaltweiten von 2 und 3.

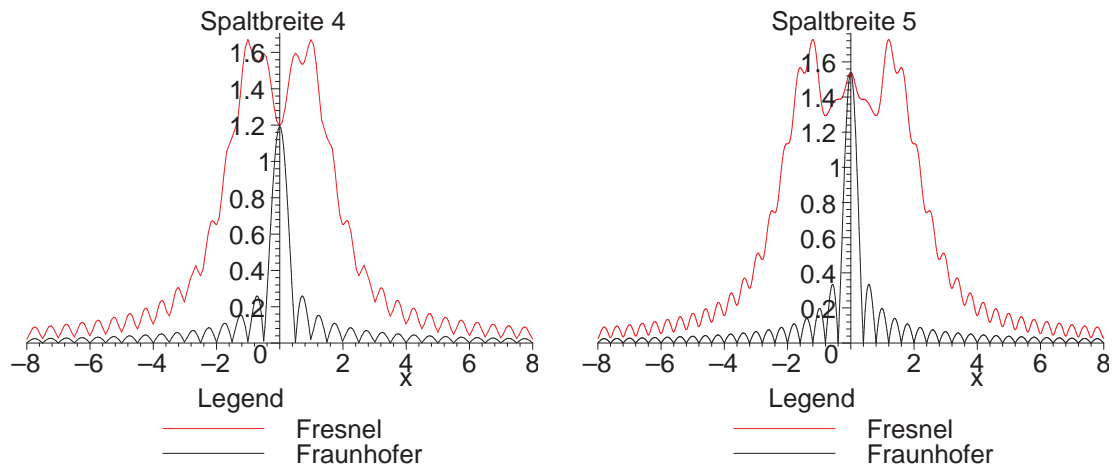
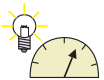


Abbildung 5.34.: Vergleich der Fresnelbeugung (rot) mit der Fraunhoferbeugung (schwarz) für Spaltweiten von 4 und 5.



5.10. Beugungsgitter und Spektrographen

(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 696]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 429]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1135])



Versuch zur Vorlesung:

Beugungsgitter (Versuchskarte O-025)

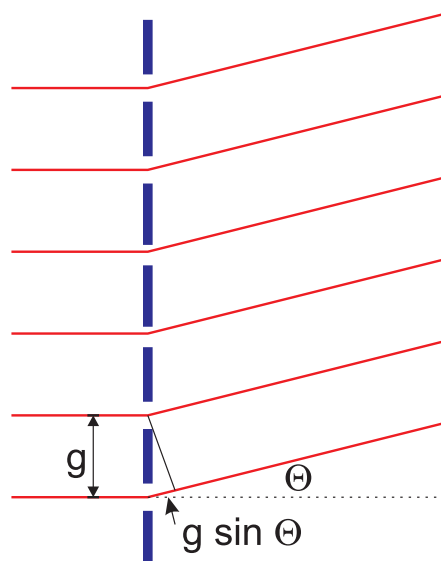


Abbildung 5.35.: Lichtdurchgang durch ein Gitter mit der Gitterkonstante g .

Beugungsgitter haben Spaltabstände g in der Größenordnung von etwa $1\mu\text{m}$. Licht wird um den Winkel Θ , gegeben durch

$$g \sin \Theta = m\lambda \quad (5.10.1)$$

abgelenkt. m heisst die *Beugungsordnung*. Wenn man eine monochromatische Lichtquelle beobachtet, stellt man fest, dass ein einzelnes Beugungsmaximum beobachtet wird. Man spricht von einer *Spektrallinie*.

Spektrum 1. Ordnung Die Menge der Spektrallinien, deren Beugungsbilder zu $m = 1$ gehören.

Spektrum 2. Ordnung Die Menge der Spektrallinien, deren Beugungsbilder zu $m = 1$ gehören.

Entsprechendes gilt für die höheren Ordnungen.

Das *Auflösungsvermögen* eines Gitters ist als die Zahl $\lambda/|\Delta\lambda|$ definiert, wobei $|\Delta\lambda|$ die kleinste, noch trennbare Wellenlängendifferenz ist. Damit ist

$$A = \frac{\lambda}{|\Delta\lambda|} = mN \quad (5.10.2)$$

Das Auflösungsvermögen ist proportional zur Zahl der beleuchteten Spalte N . Zum Beispiel braucht man, um die zwei Na-Linien bei 589nm und bei 589.59nm aufzulösen,

$$A = \frac{589\text{nm}}{589.59\text{nm} - 589\text{nm}} \approx 998$$



5.10.1. Blaze-Gitter

(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 700])

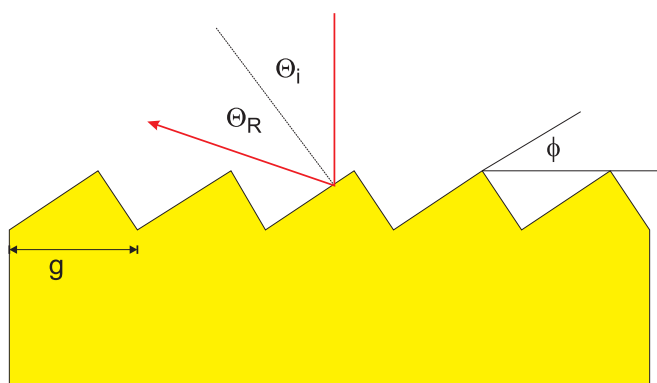


Abbildung 5.36.: Blaze-Gitter

Bei einem *Beugungsgitter*, bei dem alle Flächen senkrecht auf der einfallenden Strahlung stehen, wird der Hauptteil der Energie in die 0. Ordnung gebeugt. Für spektroskopische Zwecke ist das sinnlos, da die Wellenzerlegung bei Ordnungen

grösser als null auftritt. Deshalb haben moderne Gitter eine bestimmte Oberflächenform ("blaze"), wie in der Abbildung gezeigt. Dadurch wird die *Reflexion*, die die meiste Energie enthält, zu höheren Ordnungen verschoben.

Aus der Abbildung geht hervor, dass der reflektierte Strahl mit der Einfallrichtung den Winkel 2ϕ bildet, da ja $\Theta = \phi$ gilt. Dieser Winkel soll einer bestimmten Ordnung m der Interferenz entsprechen. Also muss gelten:

$$\sin 2\phi = m\lambda \quad (5.10.3)$$

oder

$$\Phi = \frac{1}{2} \arcsin(m\lambda/g) \quad (5.10.4)$$



Versuch zur Vorlesung:
Auflösung eines Gitters (Versuchskarte O-124)

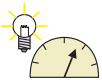


5.10.2. Hologramme

(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 925]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1137]) (Siehe Gerthsen, Physik [Mes06, pp. 526])



Versuch zur Vorlesung:
Herstellung von Hologrammen (Versuchskarte O-070)



Versuch zur Vorlesung:
Hologramm einer Elektrolokomotive (Versuchskarte O-014)

Versuch zur Vorlesung:
Hologramm eines Baggers (Versuchskarte O-069)

Die *Holographie* speichert die Phaseninformation eines Lichtfeldes in einer fotografischen Schicht. Sie wurde von *Dennis Gabor* 1947 zum ersten Male beschrieben. Um die Phaseninformation aufzuzeichnen ist es notwendig, die Interferenz des aufzuzeichnenden Lichtfeldes mit einem Referenzlichtfeld aufzuzeichnen.

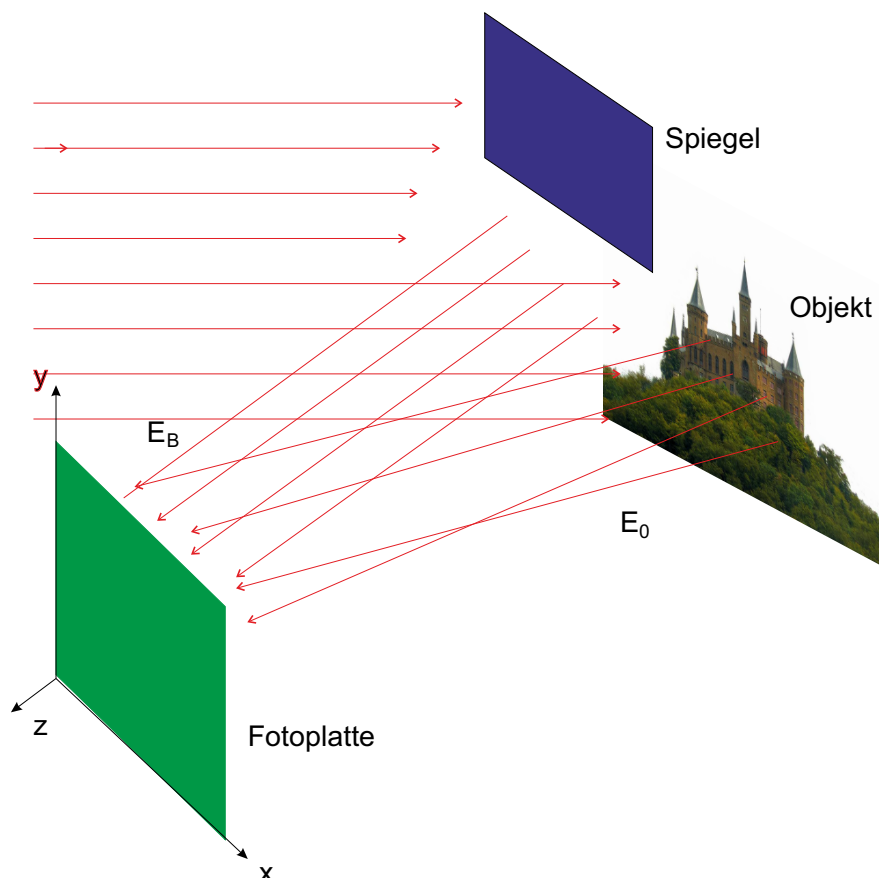


Abbildung 5.37.: Aufzeichnung eines Hologramms

Bei der Aufzeichnung des Hologramms wird eine möglichst monochromatische Lichtquelle, also zum Beispiel ein Laser auf zwei Pfade aufgeteilt. Der eine Pfad beleuchtet das Objekt, dessen gestreutes Licht mit der *Amplitude* E_0 die Fotoplatte beleuchtet. Der zweite Strahl wird über ein Spiegelsystem als Referenzstrahl E_B auf die Fotoplatte gebracht, deren Ebene mit Σ_H bezeichnet wird und die identisch mit der Ebene $z = 0$, also der xy -Ebene ist. Auf dem Hologramm wird die Intensitätsverteilung $I(x, y)$ resultierend aus der Interferenz von E_B und E_0 in eine dazu proportionale Schwärzung umgewandelt.

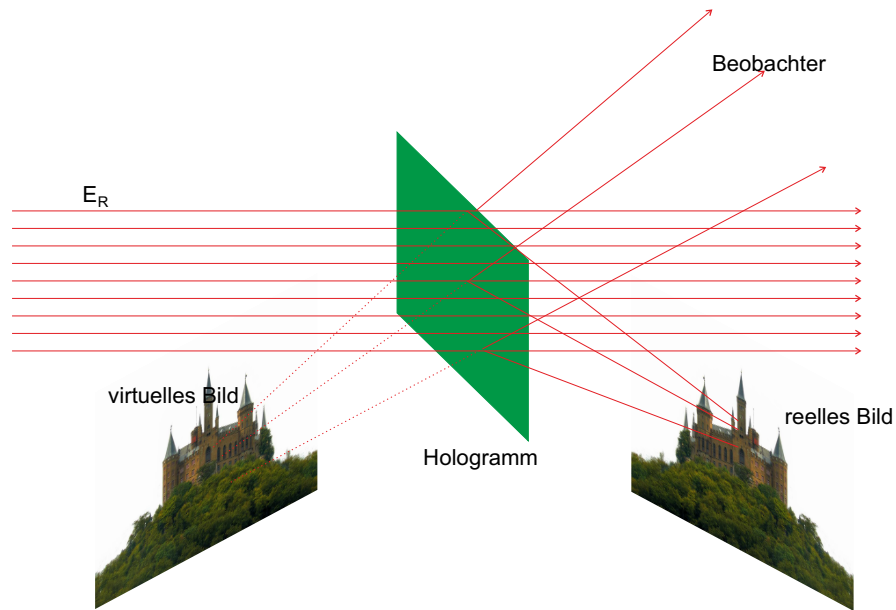


Abbildung 5.38.: Auslesen eines Hologramms

Das Hologramm in der Σ_H -Ebene wird anschliessend mit monochromatischem Licht der gleichen Wellenlänge, E_R beleuchtet. Es entstehen drei Strahlen, nämlich

den ungebogenen Strahl Dieser Strahl hat zwar eine geringere *Intensität*, kann aber so nicht ausgewertet werden.

einen gebeugten Strahl mit negativer Phase Dieser Strahl erzeugt das reelle Bild, das aber dem Betrachter tiefenverkehrt erscheint.

einem gebeugten Strahl mit positiver Phase Dieser Strahl, mit einer Kamera aufgenommen, erzeugt auf der Bildebene der Kamera ein Intensitätsmuster, wie wenn der Gegenstand noch vorhanden wäre. Dieses tiefenrichtige Bild heisst virtuelles Bild.

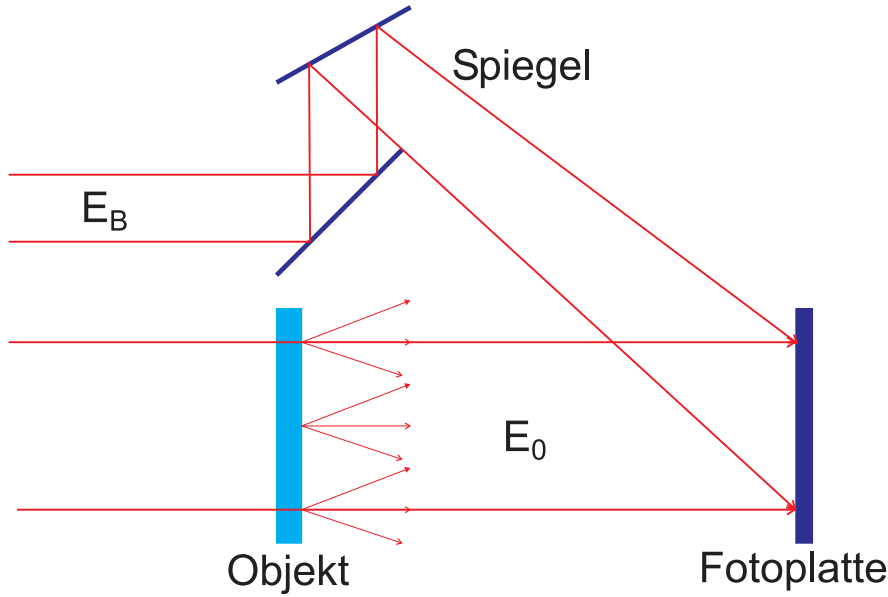


Abbildung 5.39.: Schematischer Aufbau von Hologrammen

Die Berechnung dieser Effekte beginnt mit dem Referenzstrahl E_B

$$E_B(x, y) = E_{0B} \cos[\omega t + \phi(x, y)] \quad (5.10.5)$$

Dabei ist $\phi(x, y)$ die örtlich variierende Phase, da E_B nicht senkrecht auf Σ_B fällt. Bei einer ebenen Welle, die mit dem Winkel Θ zur Senkrechten auf die Hologrammebene fällt wäre

$$\phi(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \Theta = kx \sin \Theta \quad (5.10.6)$$

Die vom Objekt gestreute Welle ist

$$E_0(x, y) = E_{00}(x, y) \cos[\omega t + \phi_0(x, y)] \quad (5.10.7)$$

wobei sowohl $E_{00}(x, y)$ und $\phi_0(x, y)$ komplizierte Funktionen des Ortes sind. Die *Intensität* in der Hologrammebene Σ_H ist durch

$$\begin{aligned} I(x, y) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} \langle (E_B(x, y) + E_0(x, y))^2 \rangle_T \quad (5.10.8) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} \frac{E_{0B}^2}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} \frac{E_{00}^2(x, y)}{2} + \\ &\quad \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} E_{0B} E_{00}(x, y) \cos(\phi(x, y) - \phi_0(x, y)) \end{aligned}$$

gegeben. Der Kontrast, gegeben durch $\nu = (I_{max} - I_{min}) / (I_{max} + I_{min})$ ist

$$\nu = \frac{2E_{0B}E_{00}}{E_{0B}^2 + E_{00}^2} \quad (5.10.9)$$

Die Schwärzung der holografische Emulsion soll proportional zu $I(x, y)$ sein. Indem wir mit der Rekonstruktionswelle

$$E_R(x, y) = E_{0R} \cos[\omega t + \phi(x, y)] \quad (5.10.10)$$

das Hologramm beleuchten, erhalten wir eine Amplitudenverteilung gerade hinter dem Hologramm proportional zu $I(x, y)E_R(x, y)$. Ohne konstante Faktoren ist das Resultat

$$\begin{aligned} E_F(x, y) \propto & \frac{1}{2} E_{0R} \left(E_{0B}^2 + E_{00}^2(x, y) \right) \cos[\omega t + \phi(x, y)] \\ & + \frac{1}{2} E_{0R} E_{0B} E_{00}(x, y) \cos[\omega t + 2\phi(x, y) - \phi_0(x, y)] \\ & + \frac{1}{2} E_{0R} E_{0B} E_{00}(x, y) \cos[\omega t + \phi_0(x, y)] \end{aligned} \quad (5.10.11)$$

Wie oben diskutiert existieren drei Terme.

- $\frac{1}{2} (E_{0B}^2 + E_{00}^2(x, y)) E_{0R}$: die amplitudenmodulierte Rekonstruktionswelle
- $\frac{1}{2} E_{0R} E_{0B} E_{00}(x, y) \cos[\omega t + 2\phi(x, y) - \phi_0(x, y)]$: Die tiefenverkehrte Welle mit negativer Phase, die das reelle Bild erzeugt.
- $\frac{1}{2} E_{0R} E_{0B} E_{00}(x, y) \cos[\omega t + \phi_0(x, y)]$: Die rekonstruierte Welle.

Durch den schrägen Einfall der Referenz- und der Rekonstruktionswelle werden virtuelles und reelles Bild getrennt.

Hologramme mit ebenen Wellen als Referenz- und Rekonstruktionswellen haben eine beschränkte Auflösung. Dies ist ersichtlich bei der Betrachtung des Hologramms einer punktförmigen Quelle. Die Interferenz zwischen einer ebenen Welle und einer Kugelwelle ergibt das gleiche Muster wie das *Beugungsmuster* an einer kreisförmigen Öffnung. Dort und auch hier nimmt der Abstand der Beugungsmaxima nach aussen ab. Indem das Hologramm mit Licht etwa der gleichen Krümmung wie die Objektwelle beleuchtet wird kann diese Abnahme vermieden werden (Fourier-Holographie).

Neben den besprochenen flächigen Hologrammen gibt es auch *Volumenhologramme*. Dort wird ein dreidimensionales *Beugungsgitter* analog zu einem Kristall erzeugt. Diese Hologramme können auch mit weissem Licht beleuchtet werden.

Durch die Überlagerung zweier Hologramme können interferometrische Messungen der Verschiebung von Objekten im μm -Bereich durchgeführt werden.



5.11. Beugung und Auflösung

(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 327, 694, 703]) (Siehe Tipler, Physik [TM04, pp. 1132]) (Siehe Pérez, Optik [Pér96, pp. 488])



Versuch zur Vorlesung:

Auflösungsvermögen eines Mikroskops (Versuchskarte O-001)

Wir verwenden die Tatsache, dass optische Systeme in den einfachsten Fällen lineare Systeme sind. Wenn $f(x, y)$ und $g(x, y)$ Intensitätsverteilungen senkrecht zur optischen Achse sind, und f die Ausgangsverteilung und g die Bildverteilung ist, schreibt man für die Abbildung

$$f(x, y) \rightarrow g(x, y) \quad (5.11.1)$$

Die Abbildung ist linear, das heisst, wenn $f_1 \rightarrow g_1$ und $f_2 \rightarrow g_2$ ist, ist

$$a_1 \cdot f_1 + a_2 \cdot f_2 \rightarrow a_1 \cdot g_1 + a_2 \cdot g_2 \quad (5.11.2)$$

Wir nennen $\hat{f}(u, v)$ die Fouriertransformation von $f(x, y)$. Es gilt

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int \hat{f}(u, v) e^{2\pi i[ux+vy]} du dv \\ \hat{f}(u, v) &= \int f(x, y) e^{-2\pi i[ux+vy]} dx dy \end{aligned} \quad (5.11.3)$$

Wir schreiben $\mathbf{x} = (x, y)$ und $\mathbf{u} = (u, v)$. Die Fouriertransformation lässt sich dann kompakt schreiben als

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \int \hat{f}(\mathbf{u}) e^{2\pi i[\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}]} d\mathbf{u} \\ \hat{f}(\mathbf{u}) &= \int f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i[\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}]} d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (5.11.4)$$



5.11.1. Impulsantwort und Faltungssatz

(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 765])



Versuch zur Vorlesung:

Fourier-Transformation (Versuchskarte O-067)

Ein Lichtfleck an der Position \mathbf{x}' der Eingangsebene erzeugt eine Intensitätsverteilung in der Ausgangsebene, die sowohl vom Beobachtungspunkt \mathbf{x} wie auch von \mathbf{x}' abhängt. Die Impulsantwort ist

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad (5.11.5)$$

Ein optisches System ist translationsinvariant, wenn

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = h(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (5.11.6)$$

gilt. Bei einem kontinuierlichen linearen optischen System gilt zwischen der Bildebene und der Eingangsebene die Beziehung

$$g(\mathbf{x}) = \int \int f(\mathbf{x}') h(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}) \star h(\mathbf{x}) \quad (5.11.7)$$

Dies ist das *Faltungstheorem* aus der *Fourieroptik*. Im Fourierraum wird aus einer Faltung eine Multiplikation, also

$$\hat{g}(\mathbf{u}) = \hat{h}(\mathbf{u}) \hat{f}(\mathbf{u}) \quad (5.11.8)$$

Wenn die optische Übertragung kohärent verläuft, dann verwendet man die oben definierte kohärente Übertragungsfunktion, die **Amplituden** verknüpft. Ist die Übertragung nicht kohärent, muss man mit Intensitäten rechnen.

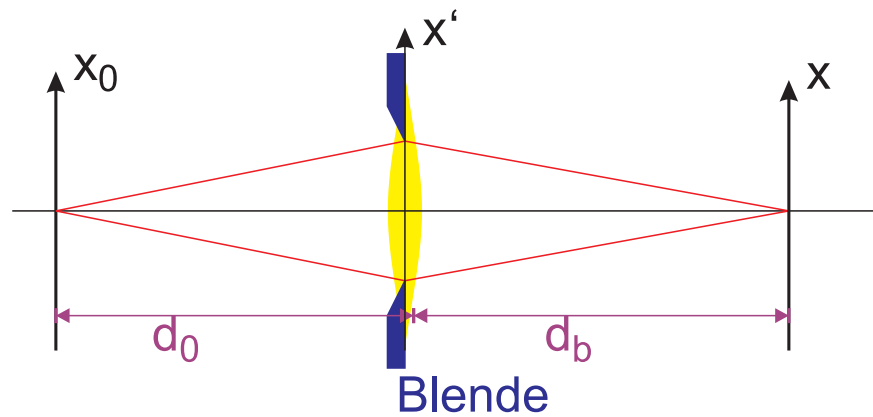


Abbildung 5.40.: Berechnung der Beugung an einer Öffnung

Das entstehende Beugungsbild eines Punktes ist das Fraunhofersche *Beugungsmuster* der Blendenöffnung. Die inkohärente Impulsantwort wird

$$H_d(x, y) = \frac{1}{\lambda^2 d_b^2} \left| \int \int P(x', y') e^{-2\pi i \left(\frac{x}{\lambda d_b} x' + \frac{y}{\lambda d_b} y' \right)} dx' dy' \right|^2 \quad (5.11.9)$$

Dies bedeutet, dass H_d das Betragsquadrat der Fouriertransformation der Pupillenfunktion P ist.

Für eine kreisförmige Öffnung ist die Pupillenfunktion

$$P(x', y') = \begin{cases} 1 & \text{für } r' \leq D/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.11.10)$$

wobei D den Durchmesser der Öffnung und $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ den Radius darstellt. Die Rechnung ist in Polarkoordinaten einfacher.

$$\begin{aligned} r' &= \sqrt{x'^2 + y'^2} \\ \Theta' &= \arctan\left(\frac{y'}{x'}\right) \end{aligned} \quad (5.11.11)$$

sowie in der Bildebene

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \Theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned} \quad (5.11.12)$$

Mit $\rho_b = r/(\lambda d_b)$ bekommt man

$$\begin{aligned}\hat{P}(\rho_b) &= \int_0^{D/2} \int_0^{2\pi} e^{-2\pi i \rho_b r' (\cos \Theta' \cos \Theta + \sin \Theta' \sin \Theta)} r' dr' d\Theta' \\ &= \int_0^{D/2} r' dr' \left\{ \int_0^{2\pi} e^{-2\pi i \rho_b r' \cos(\Theta' - \Theta)} d\Theta' \right\}\end{aligned}\quad (5.11.13)$$

Dabei ist die Grösse

$$J_0(2\pi \rho_b r') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-2\pi i \rho_b r' \cos(\Theta' - \Theta)} d\Theta' \quad (5.11.14)$$

die sogenannte *Besselfunktion nullter Ordnung*. Die Fouriertransformation einer *runden Pupille* wird also

$$\begin{aligned}\hat{P}(\rho_b) &= \int_0^{D/2} 2\pi r' J_0(2\pi \rho_b r') dr' \\ &= \frac{1}{2\pi \rho_b^2} \int_0^{\pi \rho_b D} \omega J_0(\omega) d\omega \\ &= \frac{\pi \rho_b D}{2\pi \rho_b^2} J_1(\pi \rho_b D) \\ &= \frac{D}{2\rho_b} J_1(\pi \rho_b D)\end{aligned}\quad (5.11.15)$$

$J_1(\alpha) = \int_0^\alpha \omega J_0(\omega) d\omega$ ist die Besselfunktion erster Ordnung. Mit $r = \lambda d_b \rho_b$, Θ und $S = \pi D^2/4$, der Pupillenfläche, bekommt man für die komplexe *Amplitude*

$$\begin{aligned}\psi(r) &= \hat{P}(\rho_b) = S \left[\frac{2J_1(\pi \rho_b D)}{\pi \rho_b D} \right] \\ I(r) &= |\psi(r)|^2 = S^2 \left[\frac{2J_1(\pi \rho_b D)}{\pi \rho_b D} \right]^2\end{aligned}\quad (5.11.16)$$

Die Intensitäten als Funktion von $X = \rho_b D$ sind

X	0	1.22	1.63	2.33	2.68	3.33
$[2J_1(\pi X)/(\pi X)]^2$	1	0	0.017	0	0.004	0

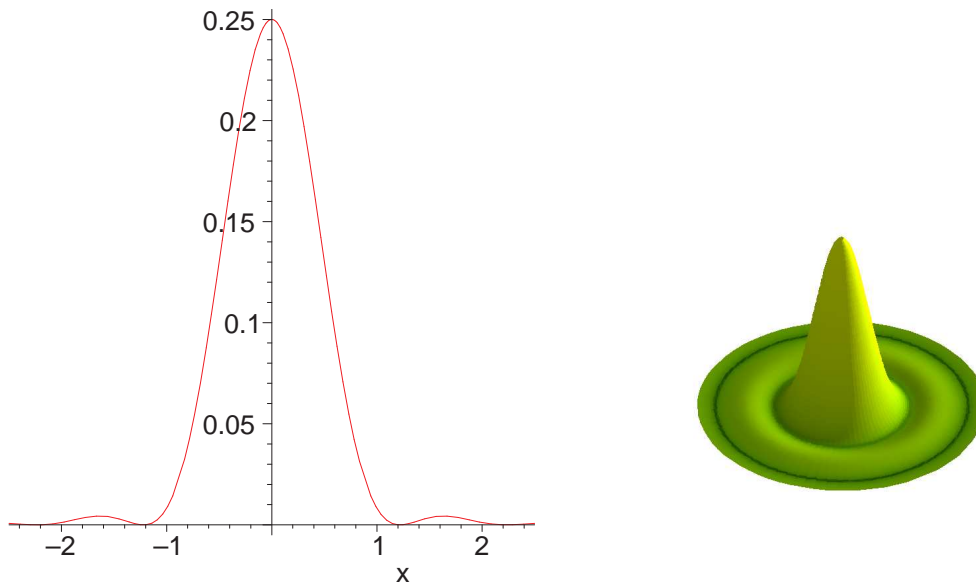
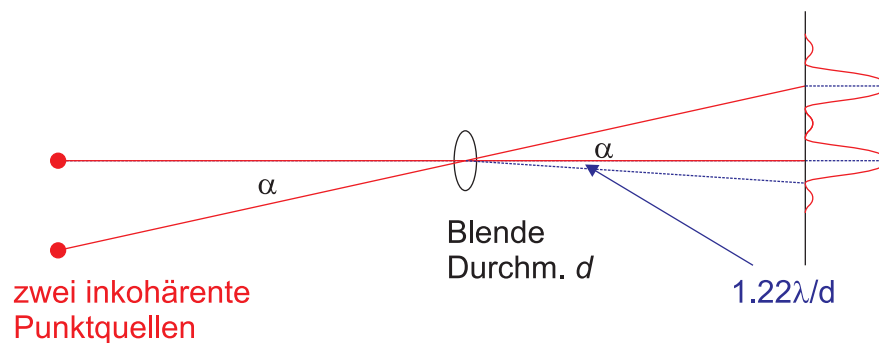


Abbildung 5.41.: Die Beugung an einer ringförmigen Apertur.

Bei der Beugungsfigur an einer kreisförmigen Öffnung mit dem Durchmesser d ist das erste Minimum bei $\sin \Theta = 1.22 \frac{\lambda}{d}$.

Abbildung 5.42.: Abbildung zweier punktförmiger, inkohärenter Quellen durch eine Blende mit der Öffnung d .

Bei dem sogenannten kritischen Winkel α_K , der durch

$$\sin \alpha_K = 1.22 \frac{\lambda}{d} \quad (5.11.17)$$

gegeben ist, fällt das Minimum der einen Beugungsfigur gerade auf das Maximum der anderen. Das obige Kriterium wird das *Rayleighsche Auflösungskriterium* genannt.

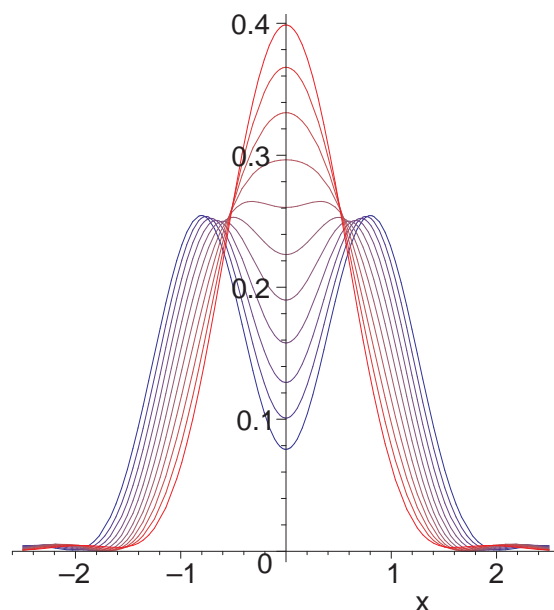


Abbildung 5.43.: Form der *Intensität* bei der Überlagerung zweier inkohärenter *Punktquellen*. Der Abstand variiert von 0.6 (rot) bis 1.6 (blau) in Schritten von 0.1.

Diese Abbildung zeigt, dass die Definition des *Auflösungsvermögens* an das mögliche Signal-Rausch-Verhältnis gebunden ist. Mit modernen Detektoren mit 16 Bit Auflösung sind deshalb leicht bessere *Grenzen der Auflösung* möglich.

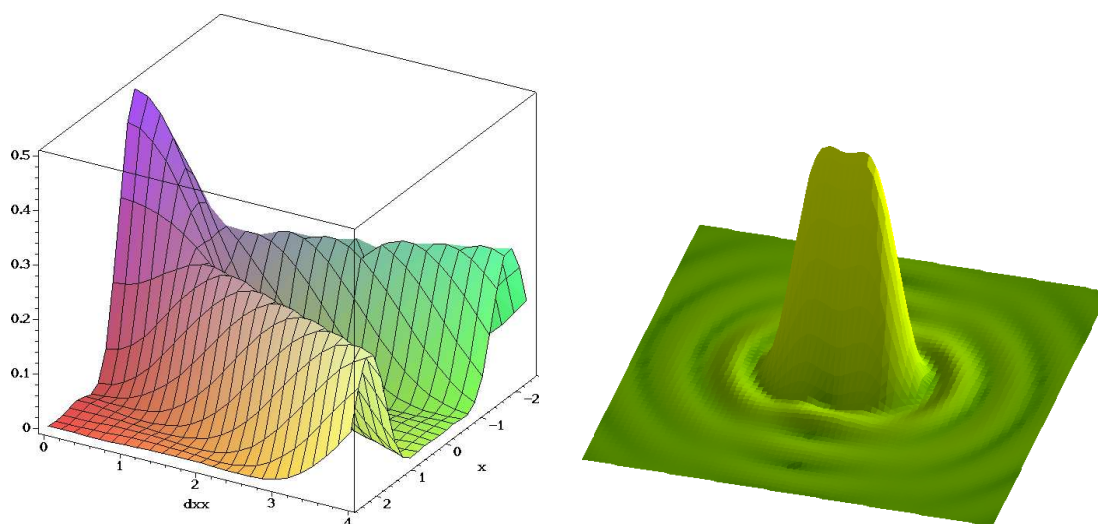


Abbildung 5.44.: Querschnitt zweier inkohärenter *Punktquellen* als Funktion des Abstandes (links) und Bild der Intensitätsverteilung bei einem Abstand von 1.

Wenn das zu untersuchende Objekt in ein Medium mit dem *Brechungsindex* n

eingebettet ist, dann verbessert sich die Auflösung auf $\sin \alpha_K = 1.22 \frac{\lambda}{n \cdot d}$, da in diesem Medium die Wellenlänge ja $\lambda' = \lambda/n$ ist.

6. Resonatoren und ihre Lichtmoden

6.1. Matrixformulierung der Lichtpropagation



(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 371]) (Siehe Yariv, Quantum Electronics [Yar75, pp. 99])

Zur Behandlung von Resonatoren verwenden wir die Matrixdarstellung der Lichtausbreitung *paraxialer Strahlen* in einer zylindersymmetrischen Anordnung. Die Lage des Lichtstrahls wird durch den Vektor

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r(z) \\ r'(z) \end{pmatrix} \quad (6.1.1)$$

wobei z die Koordinate entlang der optischen Achse ist. Die Wirkung eines optischen Elementes wird durch eine Matrix \mathbf{A} beschrieben

$$\mathbf{r}_{aus} = \mathbf{A} \mathbf{r}_{ein} \quad (6.1.2)$$

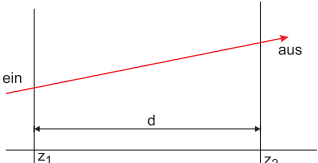
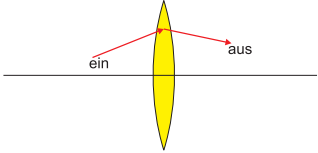
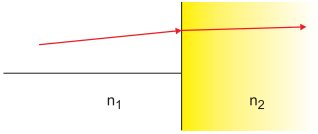
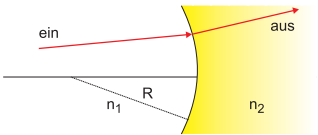
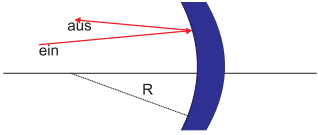
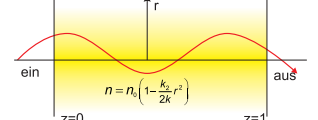
<p>Gerade Strecke</p>		$\begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
<p>Dünne Linse, Brennweite f ($f > 0$: Sammellinse, $f < 0$: Zerstreuungslinse)</p>		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$
<p>Dielektrische Grenzschicht mit den Brechungsindizes n_1 und n_2</p>		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$
<p>Sphärische dielektrische Grenzschicht mit Krümmungsradius R und den Brechungsindizes n_1 und n_2</p>		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_1}{n_2} \frac{1}{R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$
<p>Sphärischer Spiegel mit dem Krümmungsradius R</p>		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}$
<p>Gerade Strecke</p>		$\begin{bmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}} \ell\right) & \frac{k}{k_2} \sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}} \ell\right) \\ -\frac{k}{k_2} \sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}} \ell\right) & \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}} \ell\right) \end{bmatrix}$

Tabelle 6.1.: Matrizen für die Strahlausbreitung

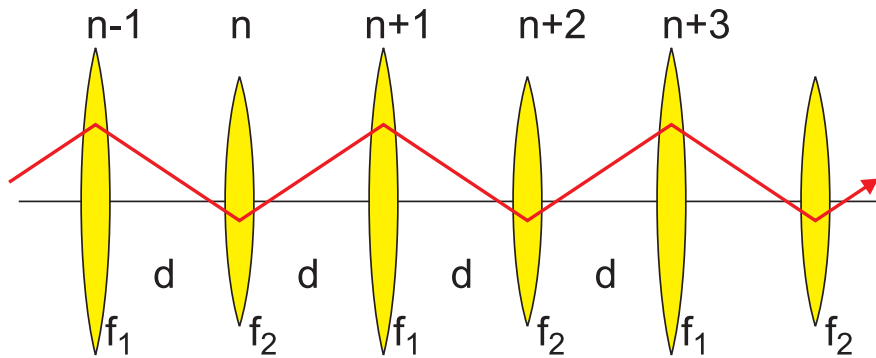


Abbildung 6.1.: Linsenübertragungsstrecke als Modell für einen Laserresonator.

Der Strahl von der n -ten zur $n + 1$ -ten *Linse* ist durch

$$\mathbf{r}_{aus} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{r}_{ein} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & -\frac{d}{f} + 1 \end{bmatrix} \mathbf{r}_{ein} \quad (6.1.3)$$

Wir haben dann eine Lichtausbreitung in einem Resonator, wenn die Strahlage nach der $n + 2$ -ten *Linse* gleich wie nach der n -ten ist. Daraus folgt

$$\mathbf{r}_{aus} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f_1} & -\frac{d}{f_1} + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f_2} & -\frac{d}{f_2} + 1 \end{bmatrix} \mathbf{r}_{ein} \quad (6.1.4)$$

Ausmultipliziert erhalten wir

$$\mathbf{r}_{aus} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{d}{f_2} & d \cdot \left(2 - \frac{d}{f_2}\right) \\ -\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} + \frac{d}{f_1 f_2} & -\frac{d}{f_1} + \left(1 - \frac{d}{f_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{d}{f_2}\right) \end{bmatrix} \mathbf{r}_{ein} \quad (6.1.5)$$

Um eine Resonatormode zu bekommen muss $\mathbf{r}_{aus} = \mathbf{r}_{ein}$ sein. Wir setzen

$$\begin{aligned} A &= 1 - \frac{d}{f_2} \\ B &= d \cdot \left(2 - \frac{d}{f_2}\right) \\ C &= -\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} + \frac{d}{f_1 f_2} \\ D &= -\frac{d}{f_1} + \left(1 - \frac{d}{f_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{d}{f_2}\right) \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

Damit bekommen wir auch

$$\begin{aligned} r_{n+2} &= A \cdot r_n + B \cdot r'_n \\ r'_{n+2} &= C \cdot r_n + D \cdot r'_n \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

Wir lösen die erste Gleichung nach r'_n auf und erhalten

$$r'_n = \frac{1}{B} (r_{n+2} - A \cdot r_n) \quad (6.1.8)$$

Diese Gleichung schreiben wir um 2 verschoben hin und bekommen

$$r'_{n+2} = \frac{1}{B} (r_{n+4} - A \cdot r_{n+2}) \quad (6.1.9)$$

Wir setzen diese Resultate in die zweite Gleichung (6.1.7) ein und erhalten

$$r_{n+4} - (A + D)r_{n+2} + (AD - BC)r_n = 0 \quad (6.1.10)$$

Durch ausrechnen erhält man, dass $AD - BC = 1$ ist. Wenn wir $b = \frac{1}{2}(A + D) = \left(1 - \frac{d}{f_2} - \frac{d}{f_1} + \frac{d^2}{2f_1 f_2}\right)$ setzen, können wir schreiben

$$r_{n+4} - 2br_{n+2} + r_n = 0 \quad (6.1.11)$$

Diese Differenzgleichung ist formal äquivalent zu einer Differentialgleichung vom Typ $\ddot{r} + kr = 0$ ¹ Die Lösung der Differentialgleichung ist $r(z) = r(0) \exp[\pm i \sqrt{k}z]$. Deshalb setzen wir in die Differenzgleichung den Ansatz $r_s = r_0 \exp[is\Theta]$ mit $s = 2n$ ein und erhalten

$$e^{2i\Theta} - 2be^{i\Theta} + 1 = 0 \quad (6.1.12)$$

Die Lösung ist

$$e^{i\Theta} = b \pm \sqrt{b^2 - 1} = b \pm i \sqrt{1 - b^2} \quad (6.1.13)$$

Mit $b = \cos \Theta$ und daraus $\sqrt{1 - b^2} = \sin \Theta$ ist die obige Gleichung erfüllt. Die allgemeine Lösung ist also

$$r_s = r_{max} \sin(s\Theta + \delta) \quad (6.1.14)$$

mit $r_{max} = r_0 / \sin \delta$. Damit wir eine stabile Lösung haben, muss Θ reell sein. Daraus folgt

$$|b| \leq 1 \quad (6.1.15)$$

Aus der Definition von b folgt²

$$\begin{aligned} -1 &\leq 1 - \frac{d}{f_1} - \frac{d}{f_2} + \frac{d^2}{2f_1 f_2} \leq 1 \\ 0 &\leq \left(1 - \frac{d}{2f_1}\right) \left(1 - \frac{d}{2f_2}\right) \leq 1 \end{aligned} \quad (6.1.16)$$

¹Dazu schreiben wir die Gleichung wie folgt um. $r_{n+4} - 2r_{n+2} + 4r_n + 2(1 - b)r_{n+2} = 0$. Nun sind die ersten drei Summanden die zweite Ableitung.

²Wir rechnen

$$\begin{aligned} 0 &\leq 2 - \frac{d}{f_1} - \frac{d}{f_2} + \frac{d^2}{2f_1 f_2} \leq 2 \\ 0 &\leq 1 - \frac{d}{2f_1} - \frac{d}{2f_2} + \frac{d^2}{4f_1 f_2} \leq 1 \end{aligned}$$

und damit folgt die Behauptung.

6.1.1. Stabilität

Wenn wir die neuen normierten Koordinaten $x = d/2f_1$ und $y = d/2f_2$ einführen, heisst die Stabilitätsbedingung

$$0 \leq (1 - x)(1 - y) \leq 1 \quad (6.1.17)$$

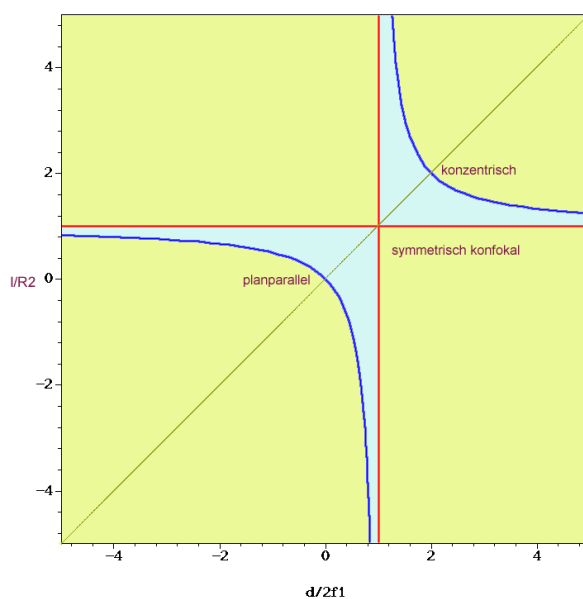


Abbildung 6.2.: Stabilitätsdiagramm für Strahlführoptiken mit Linsen. Die gelbliche Farbe zeigt die instabilen Bereiche, die türkis-Farbe die stabilen.

Das obige Stabilitätsdiagramm kann auch für Spiegel berechnet werden, indem man $f = R/2$ setzt, wobei R der Krümmungsradius des Spiegels ist.

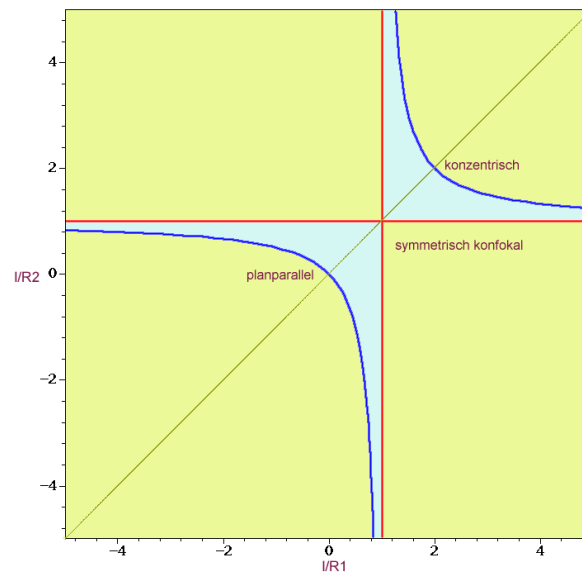
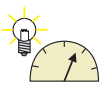


Abbildung 6.3.: Das Stabilitätsdiagramm für Spiegelresonatoren.



Versuch zur Vorlesung:
 Laser (Versuchskarte AT-052)



6.2. Resonatoren mit sphärischen Spiegeln

(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 893])

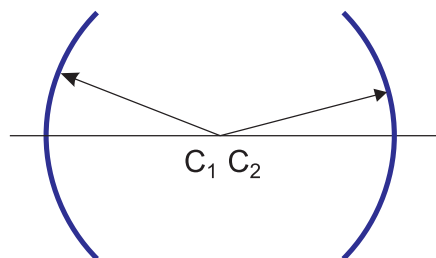


Abbildung 6.4.: Konzentrischer Resonator

Beim konzentrischen Resonator ist $R_1 = R_2 = \ell/2$. Damit liegt dieser Resonator auf der Diagonale des Stabilitätsdiagramms am Punkt $(2, 2)$ an der Grenze zur Instabilität.

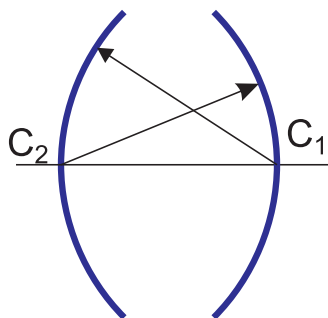


Abbildung 6.5.: Konfokaler symmetrischer Resonator.

Beim konfokalen Resonator ist $\ell = R_1 = R_2$. Dieser Resonator liegt am Punkt $(1, 1)$ und ist auch an der Grenze zu instabilen Regionen.

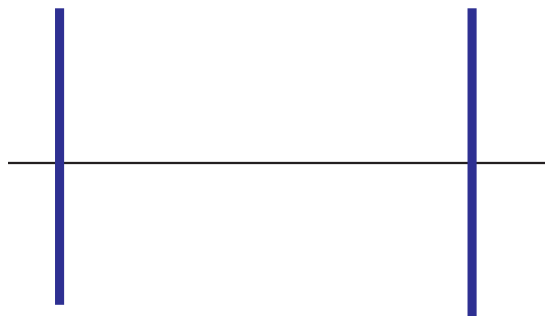


Abbildung 6.6.: Resonator mit planparallelen Spiegeln.

Der planparallele Resonator ist ein Sonderfall der sphärischen Resonatoren mit $R_1 = R_2 = \infty$. Dieser Resonator, der an der Stabilitätsgrenze bei $(0, 0)$ liegt, ist heute der am häufigsten vorkommende Resonator: praktisch jede Laserdiode besteht aus einem planparallelen Resonator.

6.3. Gaussche Strahlen



(Siehe Yariv, Quantum Electronics [Yar75, pp. 106])

Als Vorstufe betrachten wir die durch eine *Linse* induzierte abstandsabhängige Phasendifferenz für *paraxiale Strahlen*. Die *Linsenkrümmung* sei R . Die x, y -Ebene sei senkrecht zur optischen Achse. Dann ist die Dicke der *Sammellinse* durch $d(x, y) = d_0 - (x^2 + y^2)/2R_1 - (x^2 + y^2)/2R_2$ gegeben. Der optische Weg setzt sich dann aus $s = s_{Linse}(r) + s_{Luft}(r)$ zusammen. Die Zeit, die Das Licht für das durchlaufen dieser Strecke benötigt ist

$$t = t_{Linse} + t_{Luft} = \frac{s_{Linse}(r)n}{c} + \frac{s_{Luft}(r)}{c} \quad (6.3.1)$$

Mit $s_{Luft} = s_0 - s_{Linse}$ und unter Weglassung aller konstanten Terme bekommt man

$$t = -(x^2 + y^2) \left(\frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2} \right) (n - 1) \quad (6.3.2)$$

Mit $1/f = (n - 1)(1/R_1 + 1/R_2)$ ist das Resultat

$$t = -\frac{x^2 + y^2}{2f} \quad (6.3.3)$$

Wenn wir mit $E_L(x, y)$ die Amplitudenverteilung links von der *Linse* und mit $E_R(x, y)$ die Verteilung rechts von der *Linse* beschreiben, gilt

$$E_R(x, y) = E_L(x, y) e^{ik \frac{x^2 + y^2}{2f}} \quad (6.3.4)$$

Den gleichen Effekt erreicht man mit einem Medium, das die folgende Variation des Brechungsindex hat

$$n(x, y) = n_0 \left[1 - \frac{k_2}{k} (x^2 + y^2) \right] \quad (6.3.5)$$

Mit dem Fermatschen Prinzip in differentieller Schreibweise

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n = \mathbf{grad} \, n \quad (6.3.6)$$

kann die Trajektorie des Lichtstrahls ausgerechnet werden. Dabei ist s die Weglänge entlang des Lichtstrahls. Bei *paraxialen Strahlen* kann d/ds durch d/dz ersetzt werden. Damit ist die Gleichung für *paraxiale Strahlen*

$$\frac{d^2 r}{dz^2} + \left(\frac{k_2}{k} \right) r = 0 \quad (6.3.7)$$

Wenn der Strahl am Eingang die Position r_0 und die Steigung r'_0 hat, ist die Lösung

$$\begin{aligned} r(z) &= \cos \left(\sqrt{\frac{k_2}{k}} z \right) r_0 + \sqrt{\frac{k}{k_2}} \sin \left(\sqrt{\frac{k_2}{k}} z \right) r'_0 \\ r'(z) &= \sqrt{\frac{k}{k_2}} \sin \left(\sqrt{\frac{k_2}{k}} z \right) r_0 + \cos \left(\sqrt{\frac{k_2}{k}} z \right) r'_0 \end{aligned} \quad (6.3.8)$$

Aus der Elektrizitätslehre folgt (ohne Ableitung), dass für das elektrische Feld

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2(\mathbf{r}) \mathbf{E} = 0 \quad (6.3.9)$$

gilt. Wir beschränken uns auf den Fall wo $k^2(\mathbf{r}) = k^2 - k k_2 r^2$ gilt. Der Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten für Funktionen, die nur von $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ abhängen, ist

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (6.3.10)$$

Wir verwenden die Abkürzung $\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$. Weiter setzen wir an:

$$E = \psi(x, y, z)e^{-iz} \quad (6.3.11)$$

und erhalten

$$\nabla_t^2 \psi - 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} - kk_2 r^2 \psi = 0 \quad (6.3.12)$$

Wenn die *Intensität* entlang z sich nur wenig ändert ($k(\partial\psi/\partial z) \gg \partial^2\psi/\partial z^2 \ll k^2\psi$), ist, können wir für ψ ansetzen

$$\psi(x, y, z) = \exp \left\{ -i \left[P(z) + \frac{1}{2} Q(z) r^2 \right] \right\} \quad (6.3.13)$$

Wir setzen dies ein und bekommen

$$-Q^2 r^2 - 2iQ - kr^2 \frac{\partial Q}{\partial z} - 2k \frac{\partial P}{\partial z} - kk_2 r^2 = 0 \quad (6.3.14)$$

Da dies Gleichung für alle r gelten soll, müssen die Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von r einzeln verschwinden. Also ist

$$\begin{aligned} Q^2 + k \frac{\partial Q}{\partial z} + kk_2 &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{iQ}{k} \end{aligned} \quad (6.3.15)$$

In einem homogenen Medium ist $k_2 = 0$ so dass wir die Gleichung

$$Q^2 + k \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \quad (6.3.16)$$

erhalten. Wir definieren die Funktion $s(z)$ über

$$Q = k \frac{\partial s}{s} \quad (6.3.17)$$

Durch Einsetzen sehen wir, dass

$$\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = 0 \quad (6.3.18)$$

Damit muss $s(z) = az + b$ sein. Somit ist Q

$$Q(z) = k \frac{a}{az + b} \quad (6.3.19)$$

Bequemer ist es im weiteren, wenn wir die Funktion

$$q(z) = \frac{k}{Q(z)} = \frac{2\pi n}{\lambda Q(z)} \quad (6.3.20)$$

verwenden. Diese hat die Form

$$q(z) = z + q_0 \quad (6.3.21)$$

Wir setzen $Q(z)$ in die Gleichung für $P(z)$ ein und erhalten

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial z} &= -\frac{i}{q} = -\frac{i}{z + q_0} \\ P(z) &= -i \ln \left(1 + \frac{z}{q_0} \right)\end{aligned}\quad (6.3.22)$$

Wir nehmen an, dass q_0 rein imaginär ist. Dann gilt für die örtliche Amplitudenverteilung

$$\psi(r, z) = \exp \left\{ -i \left[-i \ln \left(1 + \frac{z}{q_0} \right) + \frac{k}{2(q_0 + z)} r^2 \right] \right\} \quad (6.3.23)$$

Wir setzen $q_0 = i \frac{\pi \omega_0^2 n}{\lambda}$, berücksichtigen $\lambda = 2\pi n/k$ und verwenden die Identität $\ln(a + ib) = \ln \sqrt{a^2 + b^2} + i \arctan(b/a)$ und erhalten für den ersten Term im obigen Produkt

$$\exp \left[-\ln \left(1 - i \frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2 n} \right) \right] = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2 z^2}{\pi^2 \omega_0^4 n^2}}} \exp \left[i \arctan \left(\frac{\lambda z}{\pi \omega_0 n} \right) \right] \quad (6.3.24)$$

Der zweite Term wird

$$\exp \left[\frac{-ikr^2}{2(q_0 + z)} \right] = \exp \left\{ \frac{-r^2}{\omega_0^2 \left[1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2 n} \right)^2 \right]} - \frac{ikr^2}{2z \left[1 + \left(\frac{\pi \omega_0 n}{\lambda z} \right)^2 \right]} \right\} \quad (6.3.25)$$

Die folgenden Definitionen sind üblich

$$\omega^2(z) = \omega_0^2 \left[1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2 n} \right)^2 \right] = \omega_0^2 \left(1 + \frac{z^2}{z_0^2} \right) \quad (6.3.26)$$

$$R(z) = \left[1 + \left(\frac{\pi \omega_0 n}{\lambda z} \right)^2 \right] = z \left(1 + \frac{z_0^2}{z^2} \right) \quad (6.3.27)$$

$$\eta(z) = \arctan \left(\frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2 n} \right) = \arctan \left(\frac{z}{z_0} \right) \quad (6.3.28)$$

$$z_0 \equiv \frac{\pi \omega_0^2 n}{\lambda} \quad (6.3.29)$$

Die Parameter haben die folgende Bedeutung:

$\omega(z)$	Der halbe Strahldurchmesser an der Position z
$R(z)$	Der Krümmungsradius der Wellenfront an der Stelle z
$\eta(z)$	Phasenfaktor
z_0	Ort der maximalen Krümmung der Wellenfront

Mit dieser abgekürzten Schreibweise wird

$$E(x, y, z) = E - 0 \frac{\omega_0}{\omega(z)} \exp \left[-i (kz - \eta(z)) - r^2 \left(\frac{1}{\omega^2(z)} + \frac{ik}{2r(z)} \right) \right] \quad (6.3.30)$$

Weiter ist

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi n \omega^2(z)} \quad (6.3.31)$$

Die Grösse $1/q(z)$ beschreibt die Gaussschen Strahlen. Der Realteil gibt den Krümmungsradius der Wellenfronten, der Imaginärteil den Strahldurchmesser.

Die Grösse $q(z)$ ist deshalb sehr wichtig, weil mit Hilfe der Transfermatrizen $q(z)$ propagiert werden kann. Die Transfermatrizen geben deshalb auch die Änderung der Strahlform durch optische Elemente an.



6.3.1. Divergenz und Strahldurchmesser

(Siehe Yariv, Quantum Electronics [Yar75, pp. 106])
Die obigen Parameter haben die folgende Bedeutung

6.3.1.1. $\omega(z)$ und ω_0

Die transversale Amplitudenverteilung folgt einer Gausskurve, wie man aus dem Term $\exp[r^2/\omega^2(z)]$ ersehen kann. $\omega(z)$ ist die Distanz zur optischen Achse, bei der die *Intensität* um den Faktor e vom Maximum abgefallen ist. ω_0 beschreibt den minimalen Strahldurchmesser.

6.3.1.2. $R(z)$

$R(z)$ ist der Krümmungsradius der Wellenfronten. Aus $R(z) = z \left(1 + \frac{z_0^2}{z^2}\right)$ ist ersichtlich, dass $\lim_{z \rightarrow 0} R(z) = \infty$ ist. Damit nähern Gaussche Wellen im Fokus eine ebene Welle an. Ebenso ist $\lim_{z \rightarrow \pm\infty} R(z) = \pm\infty$. Auch für sehr grosse Distanzen sind Gaussche Wellen eine gute Approximation für ebene Wellen.

6.3.1.3. Öffnungswinkel

Weit weg vom minimalen Strahldurchmesser kann ein Gausscher Strahl durch einen Öffnungswinkel

$$\Theta = \arctan\left(\frac{\lambda}{\pi \omega_0 n}\right) \approx \frac{\lambda}{\pi \omega_0 n} \quad (6.3.32)$$

beschrieben werden. Es gilt deshalb die folgende Gleichung

$$\Theta \omega_0 = \text{const} = \frac{\lambda}{\pi n} \quad (6.3.33)$$

die formal äquivalent zur Unschärferelation ist. Damit ist klar, dass ein kleinerer Brennfleck unweigerlich einen grösseren Öffnungswinkel bedeutet. In einer nullten Approximation sieht man auch, dass $\omega_0 \geq \frac{\lambda}{\pi^2 n}$ sein muss.

6.3.2. Wirkung optischer Elemente auf Gaußsche Strahlen

Die Transformation eines Gaußschen Strahls mit optischen Elementen, die durch die Matrix

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

charakterisiert sind, wird durch

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \quad (6.3.34)$$

beschrieben. Zum Beispiel wirkt eine *Linse* mit der *Brennweite* $-f$, also der Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix}$$

so auf einen Gaußschen Strahl

$$q_2 = \frac{q_1}{-q_1/f + 1} \quad (6.3.35)$$

Wir nehmen den Kehrwert und bekommen

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1 - q_1/f}{q_1} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{f} \quad (6.3.36)$$

Mit der Definition $1/q = 1/R + i\lambda/(\pi n\omega^2)$ wird die Gleichung

$$\frac{1}{R_2} + i\frac{\lambda}{\pi n\omega_2^2} = \frac{1}{R_1} + i\frac{\lambda}{\pi n\omega_1^2} - \frac{1}{f} \quad (6.3.37)$$

Diese Gleichung muss für den Real- und den Imaginärteil separat erfüllt sein. Also haben wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_2} &= \frac{1}{R_1} - \frac{1}{f} && \text{(Realteil)} \\ \omega_1 &= \omega_2 && \text{(Imaginärteil)} \end{aligned} \quad (6.3.38)$$

Wenn zwei optische Elemente mit den Matrizen

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}$$

und

$$\begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}$$

hintereinander geschaltet, ist das Resultat durch

$$\begin{aligned}
q_3 &= \frac{A_2 q_2 + B_2}{C_2 q_2 + D_2} \\
&= \frac{A_2 \frac{A_1 q_1 + B_1}{C_1 q_1 + D_1} + B_2}{C_2 \frac{A_1 q_1 + B_1}{C_1 q_1 + D_1} + D_2} \\
&= \frac{(A_2 A_1 + B_2 C_1) q_1 + (A_2 B_1 + B_2 D_1)}{(C_2 A_1 + D_2 C_1) q_1 + (C_2 B_1 + D_2 D_1)} \\
&= \frac{A_T q_1 + B_T}{C_T q_1 + D_T} \tag{6.3.39}
\end{aligned}$$

gegeben. Die Analyse dieser Gleichung zeigt, dass für die Koeffizienten auch

$$\begin{bmatrix} A_T & B_T \\ C_T & D_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \tag{6.3.40}$$

gilt. Damit gelten für Gaussche Strahlen die gleichen mathematischen Formeln für die Berechnung von optischen Systemen wie bei Lichtstrahlen.

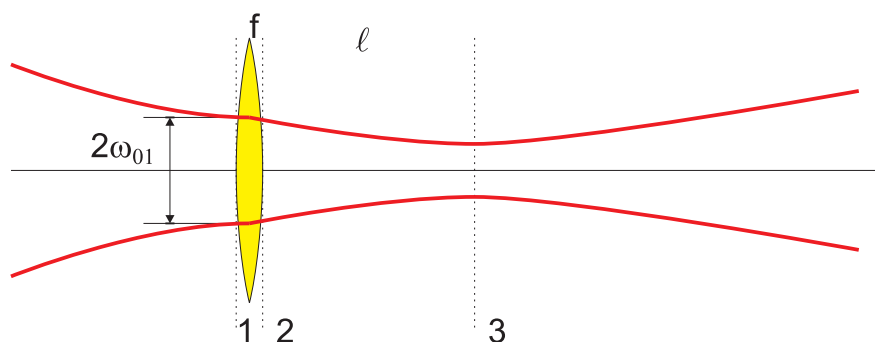


Abbildung 6.7.: Fokussierung eines Gausschen Strahls.

In der Eingangsebene 1 ist $R_1 = \infty$ und $\omega = \omega_{01}$. Dann ist

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{R_1} - i \frac{\lambda}{\pi \omega_{01}^2 n} = -i \frac{\lambda}{\pi \omega_{01}^2 n} \tag{6.3.41}$$

In der Ebene 2 ist

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{f} - i \frac{\lambda}{\pi \omega_{01}^2 n} \tag{6.3.42}$$

Damit ist

$$q_2 = \frac{1}{-\frac{1}{f} - i \frac{\lambda}{\pi \omega_{01}^2 n}} = \frac{-a + ib}{a^2 + b^2} \tag{6.3.43}$$

wobei $a = 1/f$ und $b = \lambda/(\pi \omega_{01}^2 n)$. In der Ebene 3 ist

$$q_3 = q_2 + \ell = \frac{-a}{a^2 + b^2} + \ell + \frac{ib}{a^2 + b^2} \tag{6.3.44}$$

Nun muss in der Ebene 3 auch gelten

$$\frac{1}{q_3} = \frac{1}{R_3} - i \frac{\lambda}{\pi \omega_3^2 n} = \frac{\left(\frac{-a}{a^2+b^2} + \ell\right) - i \frac{b}{a^2+b^2}}{\left(\frac{-a}{a^2+b^2} + \ell\right)^2 + \left(\frac{b}{a^2+b^2}\right)^2} \quad (6.3.45)$$

In der Ebene 3 soll der Durchmesser minimal sein, also ist $R_3 = \infty$. Damit muss in der obigen Gleichung der Realteil null sein. Damit ergibt sich die Bedingung

$$0 = \frac{-a}{a^2 + b^2} + \ell \Leftrightarrow \ell = \frac{a}{a^2 + b^2} = \frac{f}{1 + \left(\frac{f}{\pi \omega_{01}^2 n / \lambda}\right)^2} = \frac{f}{1 + \left(\frac{f}{z_{01}}\right)^2} \quad (6.3.46)$$

Und damit ist auch der Ort des Strahlminimums gegeben. Der neue Strahldurchmesser ist

$$\frac{\omega_3}{\omega_{01}} = \frac{\frac{f\lambda}{\pi \omega_{01}^2 n}}{\sqrt{1 + \left(\frac{f\lambda}{\pi \omega_{01}^2 n}\right)^2}} = \frac{\frac{f}{z_{01}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{z_{01}}\right)^2}} \quad (6.3.47)$$

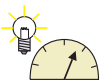
Der Parameter z_0 ist der konfokale Parameter, der angibt, in welcher Distanz vom Strahlminimum der Strahldurchmesser um $\sqrt{2}$ zunimmt. Der Wert des konfokalen Parameters ist

$$z_0 = \frac{\pi \omega_{01}^2 n}{\lambda} \quad (6.3.48)$$



6.3.3. Moden

(Siehe Hecht, Optik [Hec, pp. 881]) (Siehe Yariv, Quantum Electronics [Yar75, pp. 118])



Versuch zur Vorlesung:

Laser (Versuchskarte AT-052)

Die Gausschen Strahlen sind die Grundmode von Laserstrahlung. Sie zeichnen sich dadurch aus, dass sie keine Knotenlinie hat. Es existieren weiter Moden, die durch die Anzahl Knotenlinien in horizontaler und vertikaler Richtung charakterisiert sind. Die möglichen Moden sind durch die Randbedingungen vorgegeben. So erzeugt eine vertikale Störung durch die Resonatorachse eine Mode mit zwei Maxima, die durch eine vertikale Knotenlinie getrennt sind.

Im folgenden werden Messungen von Moden gezeigt, die im Institut für Experimentelle Physik an vertikal emittierenden Laserdioden (VCSEL) aus der Abteilung Optoelektronik gemessen wurden.

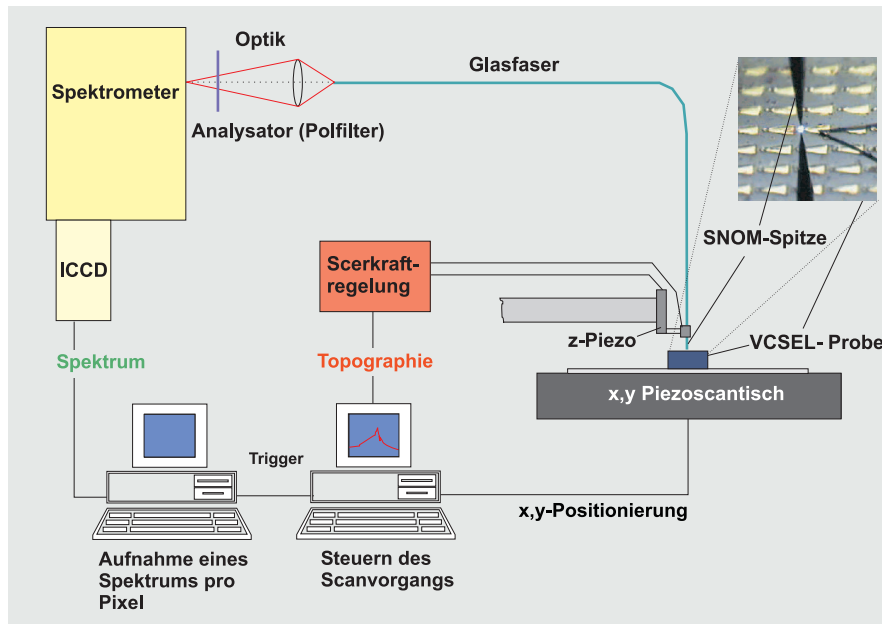
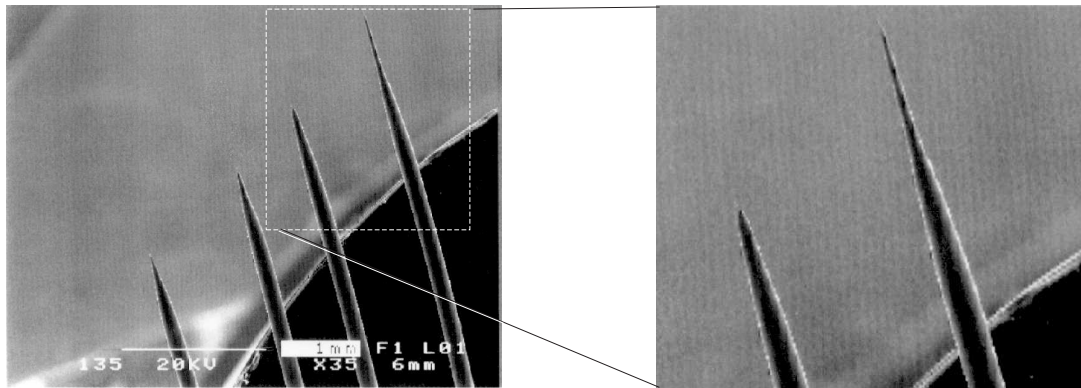


Abbildung 6.8.: Aufbau der Nahfeld-Messeinrichtung für Modenverteilungen.
(Zeichnung von Markus Fischer[Fis97]).



neue Spitze (ca. 200nm)

bisherige Spitze (ca. 80nm)

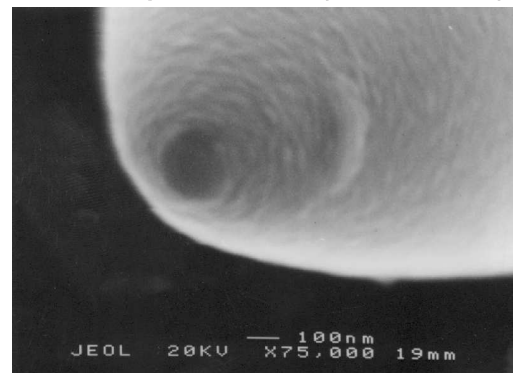
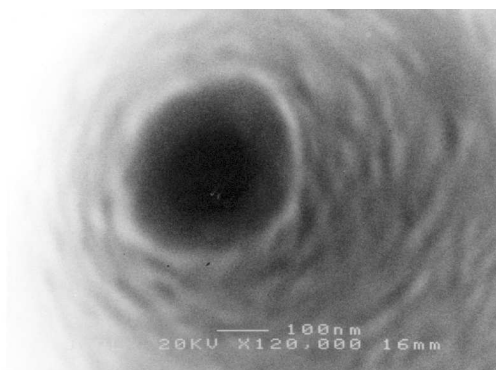


Abbildung 6.9.: Nahaufnahme von Glasfaser-Nahfeldsonden. (Daten gemessen von Markus Fischer [Fis97]).

neue Spitzenform für mehr Intensität

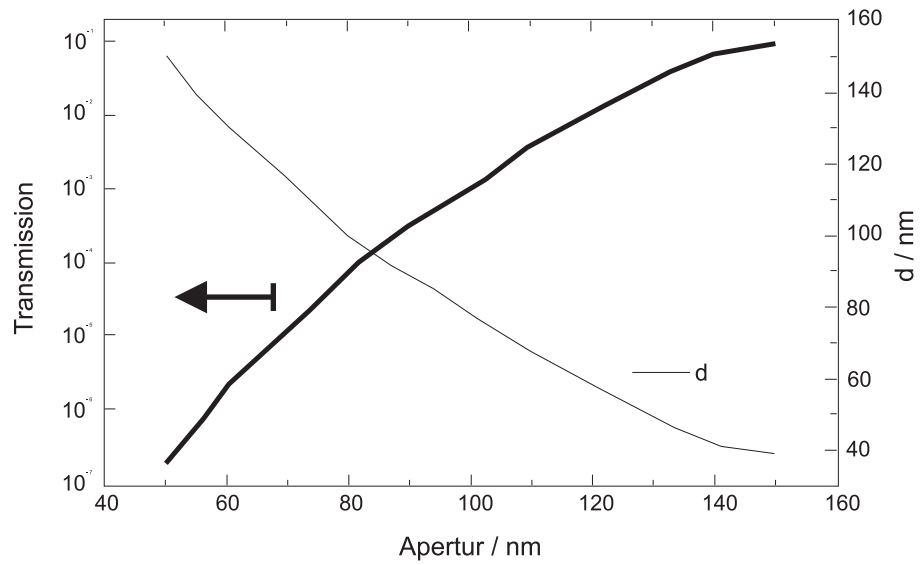


Abbildung 6.10.: Transmission von Nahfeld-Glasfasersonden. (Schaubild gezeichnet von Markus Fischer[Fis97]).

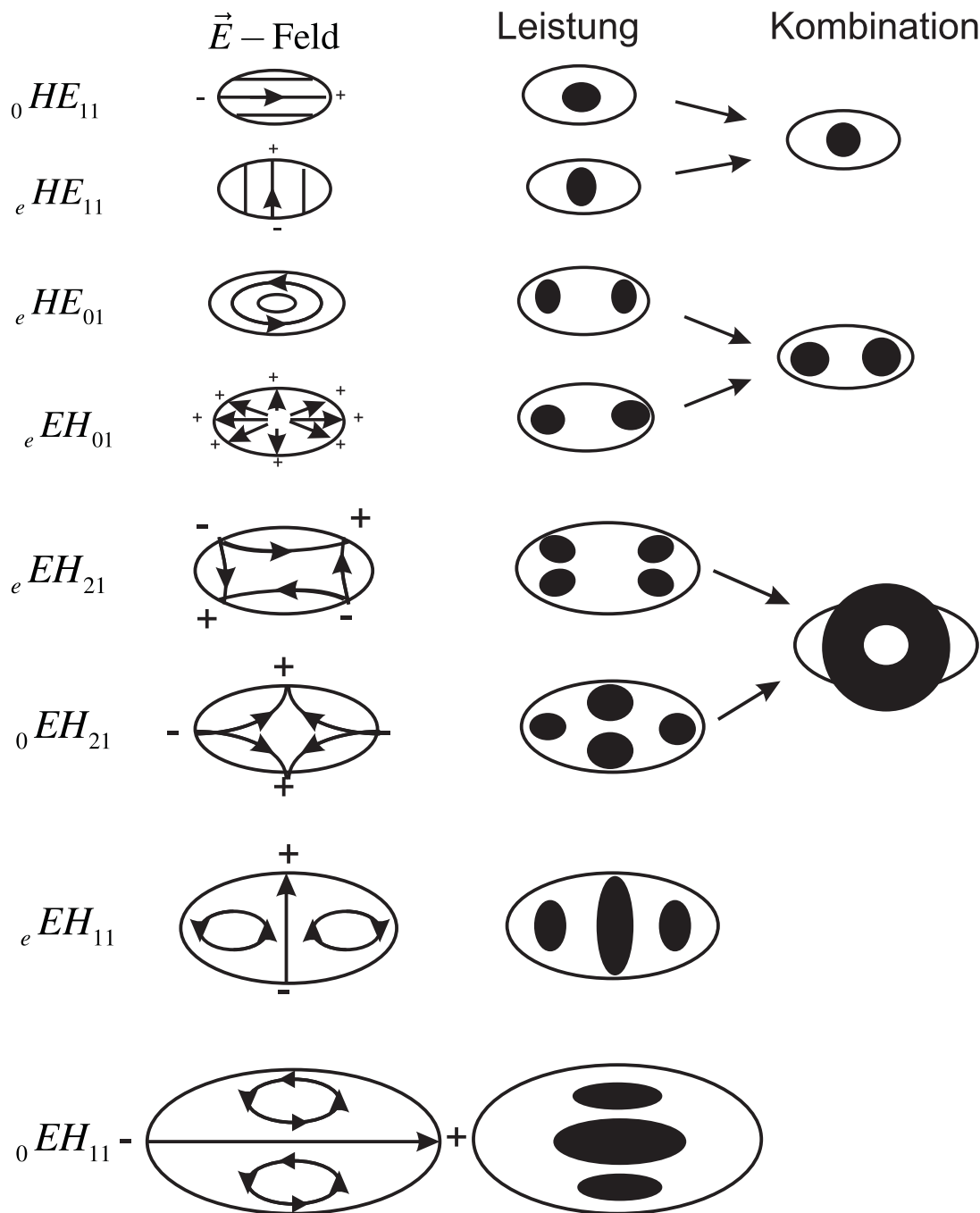


Abbildung 6.11.: Wellenleitermoden für elliptische *Wellenleiter*. Links sind die Bezeichnungen, dann die Anordnung der elektrischen Felder und schliesslich die Intensitätsmuster gezeigt. (gezeichnet nach [Dyo95].)

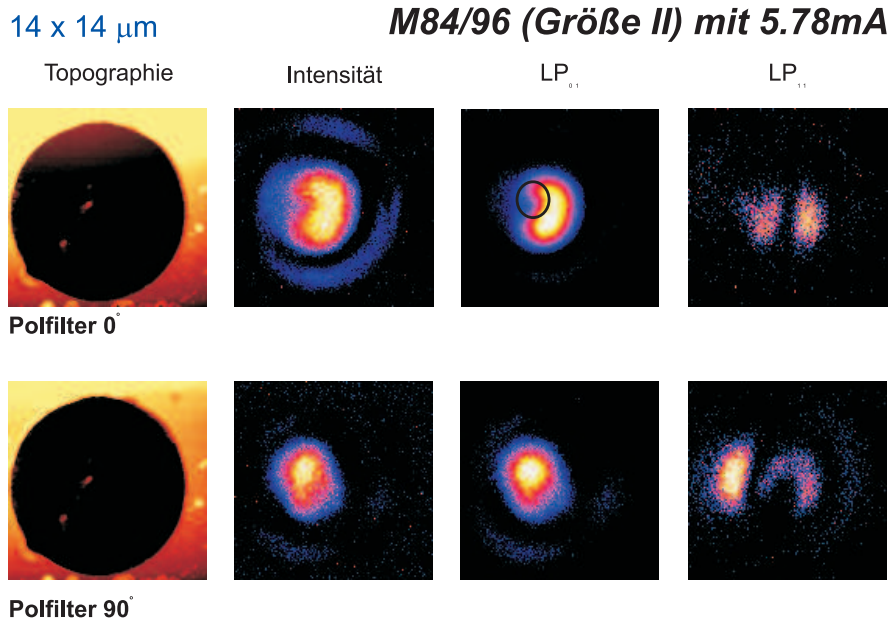


Abbildung 6.12.: Diese Aufnahme zeigt Moden bei relativ geringen Strömen. Deshalb können nur die Grundmode sowie noch wenige Oberwellen anschwingen. Die Modenform wird durch die Verunreinigungen auf den Laserspiegeln (rechts sichtbar) hervorgerufen. In der Unteren Reihe ist der Analysator für die Polarisation um $\pi/2$ gedreht worden. Die beiden Reihen zeigen also die beiden orthogonalen Polarisationszustände des Lichtes. (Daten gemessen von Markus Fischer[Fis97]).

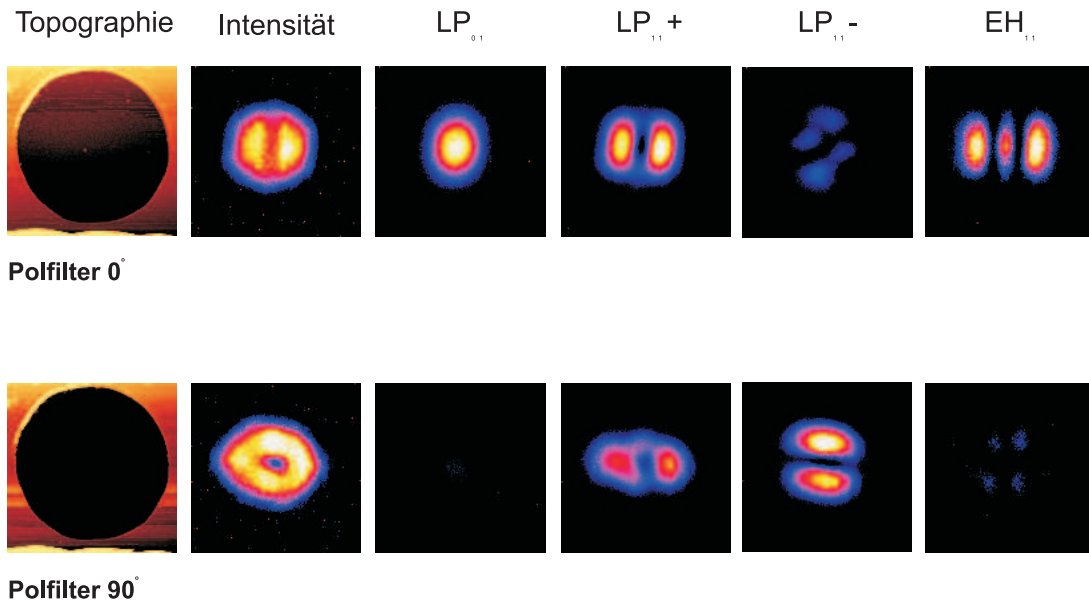
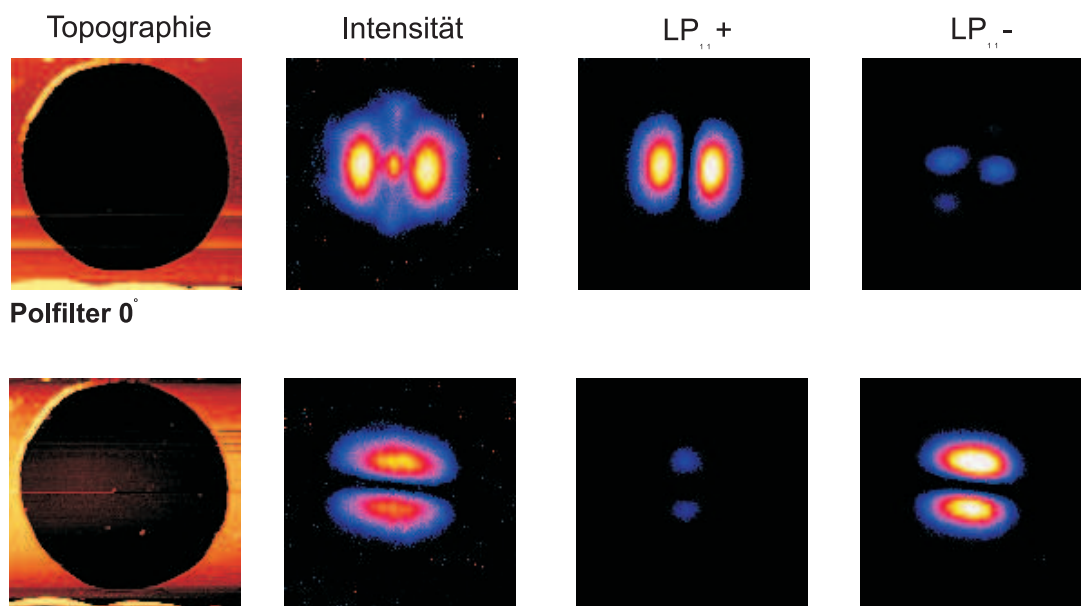
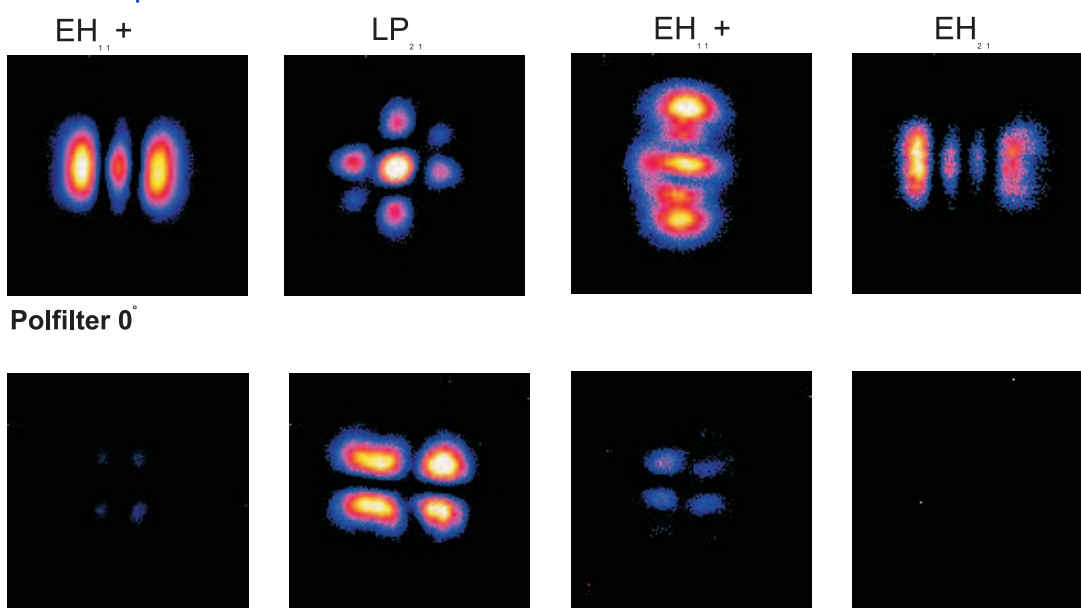
15 x 15 μm **M84/96 (Größe III) mit 7.5mA**

Abbildung 6.13.: Bei ähnlichem Strom hängen die möglichen Moden auch vom Durchmesser des Resonators ab. Dieser Resonator ist größer als der im vorherigen Bild. (Daten gemessen von Markus Fischer[Fis97]).

15 x 15 μm **M84/96 (Größe III) mit 12mA**

Polfilter 0°

Polfilter 90°
15 x 15 μm **M84/96 (Größe III) mit 12mA**

Polfilter 0°

Polfilter 90°

Abbildung 6.14.: Hier ist der Strom bei gleicher Geometrie grösser als im vorherigen Bild. Entsprechend schwingen mehr Moden an. Beachten Sie, dass die Knotenlinien von Moden mit einer orthogonalen Polarisation auch orthogonal sind. (Daten gemessen von Markus Fischer[Fis97]).

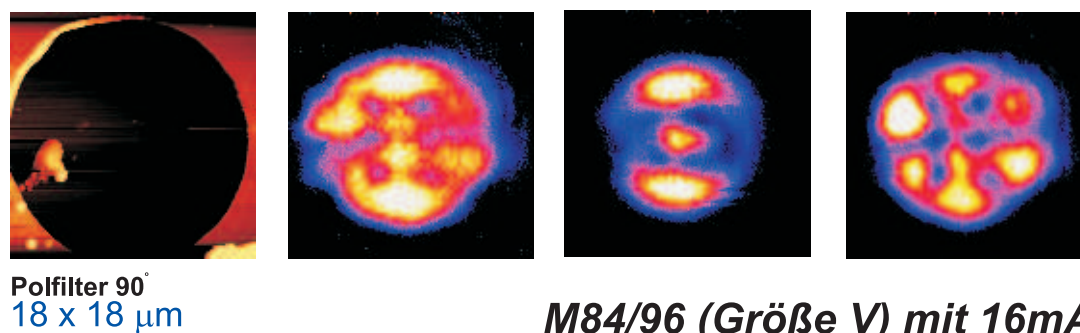
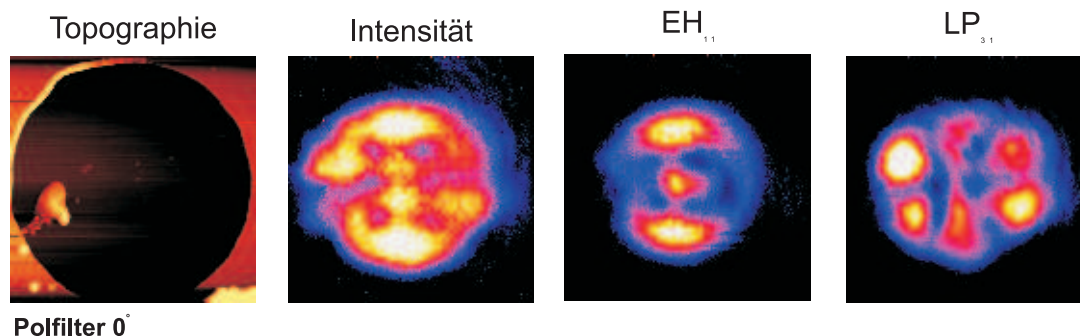
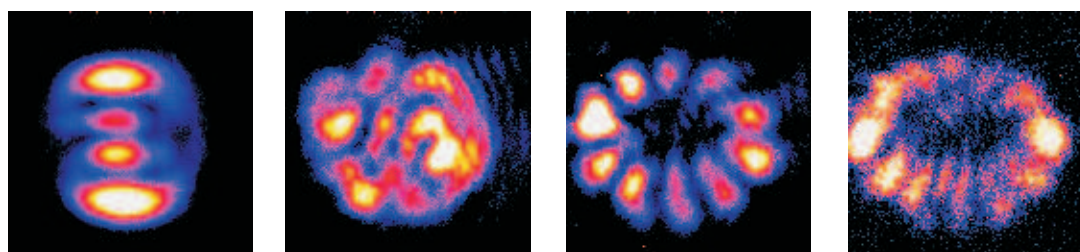
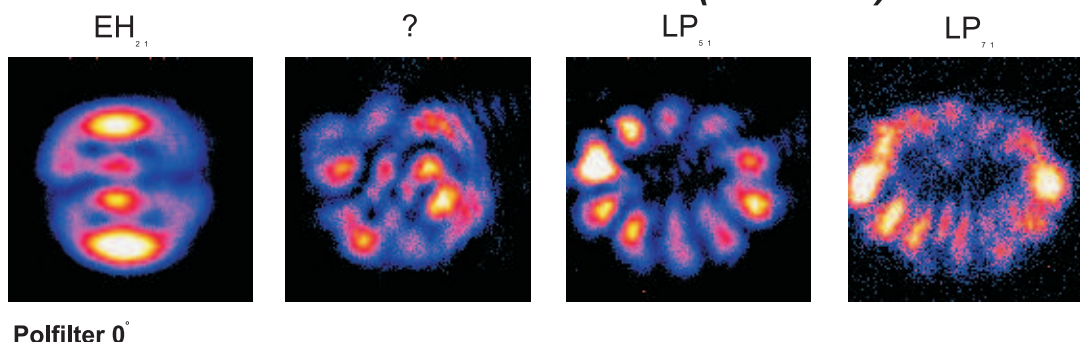
18 x 18 μm **M84/96 (Größe V) mit 16mA**18 x 18 μm **M84/96 (Größe V) mit 16mA**

Abbildung 6.15.: Dieser Laserresonator hat den grösseren Durchmesser als der vorherige. Da auch der Injektionsstrom grösser ist, schwingen hier sehr viele Moden an, die zum Teil auch nicht mehr identifiziert werden können. (Daten gemessen von Markus Fischer[Fis97]).

Einfluß der Spitze auf Polarisation

M84/96 (Größe 3), 7.5 mA, 15 x 15 μm

Polfilter 0°

Topographie

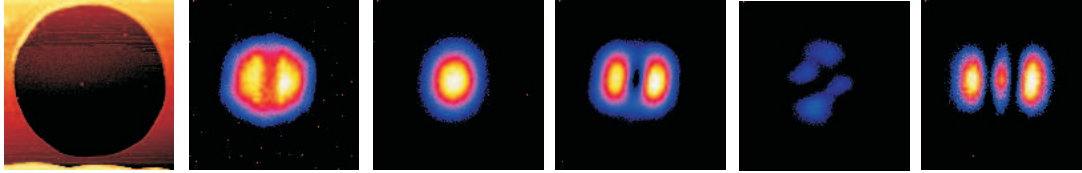
Intensität

LP₀₁

LP₁₁ +

LP₁₁ -

EH₁₁



Probe 90° nach links gedreht

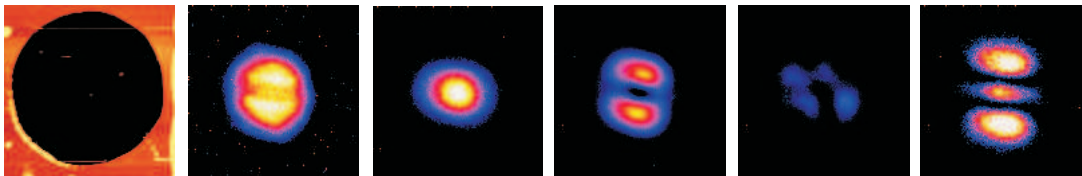


Abbildung 6.16.: Hier wird gezeigt, dass die Sonde, hier "Spitze" genannt, keinen Einfluss auf die Messung hat. (Daten gemessen von Markus Fischer[Fis97]).

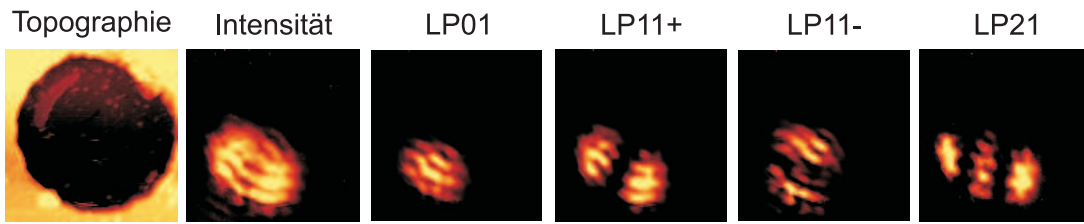
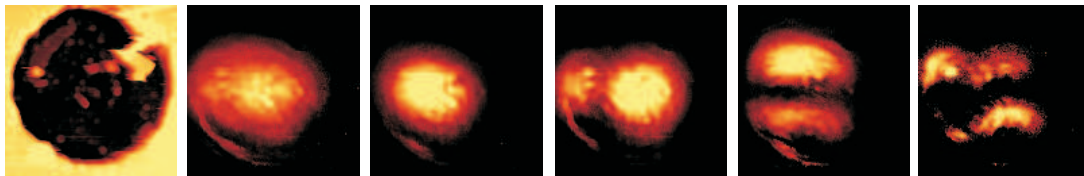
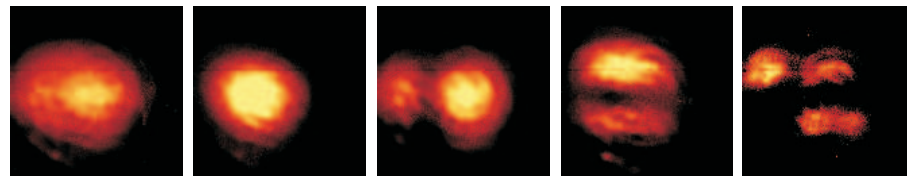
Probe M129, 4mA ($I_{in} = 1,3\text{mA}$), $12 \times 12 \mu\text{m}$ **Messung mit anderer Spitze:****Messung in ca. $1\mu\text{m}$ Abstand:**

Abbildung 6.17.: Wie bei allen Messmethoden gibt es auch hier Artefakte. So führen hier Rückwirkungen auf den Laser zu einer optisch sonst nicht erkläraren Streifenbildung. (Daten gemessen von Markus Fischer[Fis97]).

Nach Yariv[Yar75, 118] genügen die Moden in rechteckförmigen *Wellenleiter*

$$\begin{aligned}
 E_{\ell,m} &= E_0 \frac{\omega_0}{\omega(z)} H_\ell \left(\sqrt{2} \frac{x}{\omega(z)} \right) H_m \left(\sqrt{2} \frac{y}{\omega(z)} \right) \\
 &\quad \times \exp \left[-ik \frac{x^2 + y^2}{2q(z)} - ikz + i(m+n+1)\eta \right] \\
 &= E_0 \frac{\omega_0}{\omega(z)} H_\ell \left(\sqrt{2} \frac{x}{\omega(z)} \right) H_m \left(\sqrt{2} \frac{y}{\omega(z)} \right) \\
 &\quad \times \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{\omega^2(z)} - ik \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} - ikz + i(m+n+1)\eta \right]
 \end{aligned} \tag{6.3.49}$$

wobei H_ℓ das Hermitsche Polynom ℓ -ten Grades ist und die anderen Größen wie bei den Gaussschen Strahlen definiert sind.

A. Symbole

Symbol	Bedeutung
a	Abstand zweier Massen (Siehe Abschnitt 3.6) in einer Feder-Masse-Kette
a_1, a_2	die Abstände zwischen zwei Massen (Siehe Abschnitt 3.6) einer Feder-Masse-Kette mit zwei unterschiedlichen Massen, zwei unterschiedlichen Federkonstanten und zwei unterschiedlichen Abständen
A	die Amplitude einer Schwingung oder Welle (Siehe Abschnitt 4.6.1)
A	Auflösungsvermögen (Siehe Abschnitt 5.10)
\mathbf{A}	Transfermatrix (Siehe Abschnitt 6.1) in der Matrixformulierung der Lichtpropagation
A, B, C, E	Matrixkomponenten der Transfermatrix (Siehe Abschnitt 6.1) in der Matrixformulierung der Lichtpropagation
$A(r)$	Abstandsabhängigkeit der skalaren Amplitude (Siehe Abschnitt 5.2.2) einer transversalen Kugelwelle
$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$	die orts- und zeitabhängige Amplitude einer transversalen Welle (Siehe Abschnitt 5.2)
$\mathbf{A}_0(\mathbf{x})$	die (ortsabhängige) Amplitude einer transversalen Welle (Siehe Abschnitt 5.2)
$A(\delta)$	die Airy-Funktion (Siehe Abschnitt 5.1.3)
A, B, C, \dots	Bezeichnung für Punkte
A', B', C', \dots	Bezeichnung für Punkte
\overline{AB}	Strecke (Siehe Abschnitt 4.3)
\overline{ABC}	Strecke über drei Punkte
α	Winkel des einfallenden Lichtstrahls zur Oberflächennormale bei der Reflexion oder Brechung (Siehe Abschnitt 2.2)
α_k	kritischer Winkel (Siehe Abschnitt 5.11.1)
b	Bildweite (Siehe Abschnitt 2.3) bei der Abbildung durch eine Linse oder einen gekrümmten Spiegel

Symbol	Bedeutung
b	Breite einer ausgedehnten Lichtquelle (Siehe Abschnitt 5.1)
B	Bildgrösse (Siehe Abschnitt 2.3.2) bei der Abbildung durch eine Linse oder einen gekrümmten Spiegel
B, B'	Punkte (Siehe Abschnitt 4.2) zur Berechnung der Reflexion
β	Winkel des gebrochenen Lichtstrahls zur Oberflächennormale bei der Brechung (Siehe Abschnitt 2.2)
c	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum (Siehe Abschnitt 2.1) $c = 299\,792\,458 \frac{m}{s}$
c_i	Lichtgeschwindigkeit im Medium i (Siehe Abschnitt 2.2)
c_m	Lichtgeschwindigkeit in einem Medium (Siehe Abschnitt 4.2)
c_o	Lichtgeschwindigkeit in Richtung des ordentlichen Lichtes (Siehe Abschnitt 4.5.4) bei doppelbrechenden Kristallen
c_{ao}	Lichtgeschwindigkeit in Richtung des ausserordentlichen Lichtes (Siehe Abschnitt 4.5.4) bei doppelbrechenden Kristallen
C	Krümmungsmittelpunkt (Siehe Abschnitt 2.5) eines sphärischen Spiegels
$C(\omega)$	Fresnel-Cosinusintegral (Siehe Abschnitt 5.9)
d	Durchmesser der Öffnung (Siehe Abschnitt 3.3) der Blende einer Kamera
d	Durchmesser des Faserkerns (Siehe Abschnitt 4.3) einer Glasfaser
d	Abstand der Spiegel (Siehe Abschnitt 5.1.3) in einem Fabry-Perot-Interferometer
d	Abstand von der optischen Achse (Siehe Abschnitt 5.2.2) in der paraxialen Näherung
d	Abstand der beiden Spalte (Siehe Abschnitt 5.3) beim Doppelspaltversuch
D	Abstand zwischen Beugungsobjekt und Schirm (Siehe Abschnitt 5.9) bei der Beugung
δ	Phase (Siehe Abschnitt 4.6.1) oder Phasendifferenz (Siehe Abschnitt 5.3)
$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$	elektrisches Feld (Siehe Abschnitt 4.5.1)
\mathbf{E}_0	Amplitude des elektrischen Feldes (Siehe Abschnitt 4.5.1), auch Polarisationsrichtung genannt
E_0	die Amplitude der einfallenden Welle (Siehe Abschnitt 5.1.3) in einem Fabry-Perot-Interferometer

Symbol	Bedeutung
E_e	die Amplitude der einfallenden Welle (Siehe Abschnitt 4.6) bei den Fresnelschen Formeln
E_g	die Amplitude der gebrochenen Welle (Siehe Abschnitt 4.6) bei den Fresnelschen Formeln
E_r	die Amplitude der reflektierten Welle (Siehe Abschnitt 4.6) bei den Fresnelschen Formeln
E_x	x -Komponente des elektrischen Feldes (Siehe Abschnitt 4.5.1)
E_y	y -Komponente des elektrischen Feldes (Siehe Abschnitt 4.5.1)
E_z	z -Komponente des elektrischen Feldes (Siehe Abschnitt 4.5.1)
E_0	die Amplitude der einfallenden Welle (Siehe Abschnitt 5.1.3) in einem Fabry-Perot-Interferometer
E_{0r}	die Amplitude der reflektierten Welle (Siehe Abschnitt 5.1.3) in einem Fabry-Perot-Interferometer
E_{0t}	die Amplitude der transmittierten Welle (Siehe Abschnitt 5.1.3) in einem Fabry-Perot-Interferometer
ε	Vergrosserter Sehwinkel (Siehe Abschnitt 3.2) eines Gegenstandes
ϵ	Relative Dielektrizitätszahl (Siehe Abschnitt 4.2). Im Vakuum ist $\epsilon = 1$
ε_0	Sehwinkel (Siehe Abschnitt 3.2) eines Gegenstandes
ϵ_0	Dielektrische Feldkonstante des Vakuums (Siehe Abschnitt 4.2) $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{F}{m}$
$\eta(z)$	Ortsabhängiger Phasenfaktor eines Gaussschen Strahls (Siehe Abschnitt 6.3)
f	Brennweite (Siehe Abschnitt 2.3.1)
f_1	Objektivbrennweite eines Mikroskops (Siehe Abschnitt 3.4)
f_2	Okularbrennweite eines Teleskops (Siehe Abschnitt 3.5)
f_a	Brennweite des Auges (Siehe Abschnitt 3.2)
f_o	Okularbrennweite eines Mikroskops (Siehe Abschnitt 3.4)
$h(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$	Impulsantwort (Siehe Abschnitt 5.11.1)
$f(x)$	Objektfunktion bei der optischen Abbildung (Siehe Abschnitt 5.11.1)
F	der Finessefaktor (Siehe Abschnitt 5.1.3) eines Fabry-Perot-Interferometer

Symbol	Bedeutung
\mathcal{F}	die Finesse (Siehe Abschnitt 5.1.3) eines Fabry-Perot-Interferometer
F_1, F_2	Brennpunkte (Siehe Abschnitt 2.3.3)
$F(\omega)$	Cornu-Spirale (Siehe Abschnitt 5.9)
ϕ	Phase (Siehe Abschnitt 4.4)
ϕ_1, ϕ_2	Winkel zum Lot der einfallenden und der gebrochenen Welle (Siehe Abschnitt 4.3)
ϕ_{tot}	Winkel der Totalreflexion (Siehe Abschnitt 4.3)
$\phi(x, y)$	ortsabhängige Phase bei der Holografie (Siehe Abschnitt 5.10.2)
Φ	Gesamte Phase (Siehe Abschnitt 5.7.1) bei der Beugung am Einzelspalt
g	Gegenstandsweite (Siehe Abschnitt 2.3) bei der Abbildung durch eine Linse oder einen gekrümmten Spiegel
g	Gitterabstand (Siehe Abschnitt 5.10)
\mathbf{g} oder g	Erdbeschleunigung (Siehe Abschnitt 3.6) an der Erdoberfläche
$f(x)$	Bildfunktion bei der optischen Abbildung (Siehe Abschnitt 5.11.1)
G	Gegenstandsgrösse (Siehe Abschnitt 2.3.2) bei der Abbildung durch eine Linse oder einen gekrümmten Spiegel
$G(\phi)$	Modulationsfunktion (Siehe Abschnitt 3.6)
γ	Winkel des reflektierten Lichtstrahls zur Oberflächennormale bei der Reflexion (Siehe Abschnitt 2.2)
h	Abstand (Siehe Abschnitt 2.5) eines Punktes von der optischen Achse
$h(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$	Impulsantwort (Siehe Abschnitt 5.11.1)
$H_d(x, y)$	Inkohärente Impulsantwort (Siehe Abschnitt 5.11.1)
$H_{\ell(\alpha)}$	Hermisches Polynom ℓ -ten Grades (Siehe Abschnitt 6.3.3)
i	imaginäre Einheit ($i^2 = -1$)
I	Intensität (Siehe Abschnitt 4.2) einer Welle oder eines Lichtstrahls. Die Intensität hängt mit dem elektrischen Feld (Amplitude) einer Welle über $I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E^2$ zusammen. In nichtmagnetischen Materialien ist $\mu = 1$. Mit $\sqrt{\epsilon} = n$ bekommen wir $I = \frac{n\epsilon_0 c}{2} E^2$.

Symbol	Bedeutung
I_i	die Intensität der einfallenden Welle (Siehe Abschnitt 5.1.3) in einem Fabry-Perot-Interferometer
I_r	die Intensität der reflektierten Welle (Siehe Abschnitt 5.1.3) in einem Fabry-Perot-Interferometer
I_t	die Intensität der transmittierten Welle (Siehe Abschnitt 5.1.3) in einem Fabry-Perot-Interferometer
I_0	Intensität der Quelle (Siehe Abschnitt 4.2) einer Welle oder eines Lichtstrahls
$I(r)$	Abstandsabhängigkeit der Intensität (Siehe Abschnitt 5.2.2) einer Kugelwelle
j	andere Schreibweise der imaginären Einheit ($j^2 = -1$)
$J_0(\alpha)$	Besselfunktion nullter Ordnung (Siehe Abschnitt 5.11.1)
$J_1(\alpha)$	Besselfunktion erster Ordnung (Siehe Abschnitt 5.11.1)
k	Federkonstante (Siehe Abschnitt 3.6), z.B. der Feder in einer Feder-Masse-Kette
\mathbf{k}	Wellenvektor (Siehe Abschnitt 3.6)
\mathbf{k}, \mathbf{k}'	Wellenvektoren (Siehe Abschnitt 4.2) bei der Reflexion
k_1, k_2	Die Federkonstanten (Siehe Abschnitt 3.6) einer Feder-Masse-Kette mit zwei unterschiedlichen Massen, zwei unterschiedlichen Federkonstanten und zwei unterschiedlichen Abständen
k_{max}	Maximale Wellenzahl (Siehe Abschnitt 3.6) in einer Feder-Masse-Kette
ℓ	Weg des Lichtes (Siehe Abschnitt 4.3)
ℓ	Abstand des Beobachtungsschirmes (Siehe Abschnitt 5.3) beim Doppelspaltversuch
$\delta\ell$	Optischer Weg (Siehe Abschnitt 5.6)
L	Kohärenzlänge (Siehe Abschnitt 5.1)
λ	Wellenlänge (Siehe Abschnitt 3.6)
λ'	Wellenlänge in einem Medium (Siehe Abschnitt 5.6)
λ_m	Wellenlänge in einem Medium (Siehe Abschnitt 4.3)
λ_{min}	Minimale Wellenlänge (Siehe Abschnitt 3.6) in einer Feder-Masse-Kette

Symbol	Bedeutung
Λ	Weglängendifferenz (Siehe Abschnitt 5.1.3) in einem Fabry-Perot-Interferometer
m	Masse (Siehe Abschnitt 3.6)
m	Laufzahl: Anzahl der Wellenlängen (Siehe Abschnitt 5.1.3) in einem Fabry-Perot-Interferometer und beim Doppelspaltversuch (Siehe Abschnitt 5.3)
m_1, m_2	Die Massen (Siehe Abschnitt 3.6) einer Feder-Masse-Kette mit zwei unterschiedlichen Massen, zwei unterschiedlichen Federkonstanten und zwei unterschiedlichen Abständen
μ_0	Magnetische Feldkonstante des Vakuums. $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am} = 1.2566 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am}$
μ	Relative Permeabilität. Im Vakuum ist $\mu = 1$
n	Brechungsindex oder Brechzahl (Siehe Abschnitt 4.2) eines Mediums
n	Laufzahl (Anzahl Wellenlängen) (Siehe Abschnitt 5.2.2) in der paraxialen Näherung
n_g	Brechungsindex zwischen den Spiegeln (Siehe Abschnitt 5.1.3) in einem Fabry-Perot-Interferometer
n_i	Brechungsindex im Medium i (Siehe Abschnitt 2.2) $n_i = \frac{c}{c_i}$
N	Anzahl Gitterlinien (Siehe Abschnitt 5.10)
p	Index zur Bezeichnung von Licht (Siehe Abschnitt 4.5.4), dessen Polarisationssebene parallel zur Einfallsebene ist.
P, P'	Bezeichnung für Punkte (Siehe Abschnitt 2.3.3)
$P(x', y')$	Pupillenfunktion (Siehe Abschnitt 5.11.1)
$P(z), Q(z)$	Bestimmungsfunktionen der Gaußschen Strahlen (Siehe Abschnitt 6.3)
$\Psi(\mathbf{x}, t)$	die orts- und zeitabhängige Amplitude einer longitudinalen Welle (Siehe Abschnitt 5.2)
$\Psi_0(\mathbf{x})$	die (ortsabhängige) Amplitude einer longitudinalen Welle (Siehe Abschnitt 5.2)
$q(z)$	Bestimmungsfunktionen der Gaußschen Strahlen (Siehe Abschnitt 6.3), zur Verwendung in der Matrixformulierung der Lichtpropagation
r	Krümmungsradius (Siehe Abschnitt 2.3)
r	Reflexionskoeffizient (Siehe Abschnitt 5.1.3) in den Stokesschen Beziehungen

Symbol	Bedeutung
r	Abstand (Siehe Abschnitt 5.2.2) des Beobachtungspunktes vom Zentrum einer Kugelwelle
\mathbf{r}	Lage des Lichtstrahls (Siehe Abschnitt 6.1) in der Matrixformulierung der Lichtpropagation
r_0	Referenzabstand (Siehe Abschnitt 5.2.2) bei der Beschreibung einer Kugelwelle
$R(z)$	Ortsabhängiger Krümmungsradius eines Gaußschen Strahls (Siehe Abschnitt 6.3)
s	Abstand auf dem Kreisbogen (Siehe Abschnitt 2.5) eines Punktes von der optischen Achse
s	Index zur Bezeichnung von Licht (Siehe Abschnitt 4.5.4), dessen Polarisationssebene senkrecht zur Einfallsebene ist.
s	Lichtweg zur Berechnung der Beugungsmuster (Siehe Abschnitt 5.9)
s_0	Nahpunkt des Auges (Siehe Abschnitt 3.1) $s_0 = 25\text{cm}$
ds	differentielles Wegelement, verwendet zur Ableitung oder in Integralen.
$S(\omega)$	Fresnel-Sinusintegral (Siehe Abschnitt 5.9)
σ	Winkelbereich der kohärenten Überlagerung (Siehe Abschnitt 5.1)
Σ_H	Ebene des Hologramms (Siehe Abschnitt 5.10.2)
t	Zeit (Siehe Abschnitt 3.6)
t	Transmissionskoeffizient (Siehe Abschnitt 5.1.3) in den Stokeschen Beziehungen
Δt	Zeitunterschied (Siehe Abschnitt 4.2) zwischen zwei Ereignissen
τ	Kohärenzzeit (Siehe Abschnitt 5.1)
Θ	Beobachtungswinkel (Siehe Abschnitt 5.3) beim Doppelspaltversuch
Θ_P	Brewster-Winkel (Siehe Abschnitt 4.5.3)
v_G	Gruppengeschwindigkeit (Siehe Abschnitt 3.6)
V	Abbildungsmaßstab (Siehe Abschnitt 2.3) oder Vergrößerung (Siehe Abschnitt 2.3)
V_L	Vergrößerung einer Lupe (Siehe Abschnitt 3.2)

Symbol	Bedeutung
w	Variationsparameter (Siehe Abschnitt 4.4)
ω	Kreisfrequenz (Siehe Abschnitt 3.6) einer Schwingung oder Welle
$\Delta\omega$	Frequenzbreite der Resonanz (Siehe Abschnitt 5.1)
ω_0	minimaler halber Strahldurchmesser eines Gaussschen Strahls (Siehe Abschnitt 6.3)
$\omega(z)$	Ortsabhängiger halber Strahldurchmesser eines Gaussschen Strahls (Siehe Abschnitt 6.3)
Ω_0	maximale Kreisfrequenz (Siehe Abschnitt 3.6) in einer Feder-Masse-Kette
x, y, z	die drei Achsen des kartesischen Koordinatensystems
x', y', z'	die drei Achsen eines gegenüber dem Ursprungssystem verschobenen (und/oder gedrehten) kartesischen Koordinatensystems
\boldsymbol{x}	Ortsvektor (Siehe Abschnitt 4.5.1)
ξ_i	Auslenkung der i -ten Masse (Siehe Abschnitt 3.6) in einer Feder-Masse-Kette
y_m	Abstand des y -ten Streifens (Siehe Abschnitt 5.3) beim Doppelspaltversuch
Δy	Abstand zweier Streifens (Siehe Abschnitt 5.3) beim Doppelspaltversuch
z	Koordinate entlang der optischen Achse (Siehe Abschnitt 6.1) in der Matrixformulierung der Lichtpropagation
z_0	Ort der maximalen Krümmung eines Gaussschen Strahls (Siehe Abschnitt 6.3)

Abbildungsverzeichnis

2.1	Mikroskope	7
2.2	Laser	8
2.3	Nahfeldmikroskope	8
2.4	Optiklabor	8
2.5	Lichtgeschwindigkeit	9
2.6	Bradley und die Lichtgeschwindigkeit	10
2.7	Dreiecke zur Berechnung der Lichtgeschwindigkeit nach Bradley	10
2.8	Lichtgeschwindigkeitsmessung nach <i>Armand Fizeau</i> (1849)	11
2.9	Messung der Lichtgeschwindigkeit mit der <i>Drehspiegelmethode</i>	12
2.10	Reflexionsgesetz	13
2.11	Strahlengang bei Brechung	14
2.12	Brechung von Licht an einer gekrümmten Glasoberfläche	15
2.13	Dünne Linse	16
2.14	Brennweitenbestimmung nach Bessel	17
2.15	Wellenfronten beim Durchgang durch eine <i>Linse</i>	18
2.16	Zerstreuungslinse	19
2.17	Abbildung bei einer Konvexlinse	19
2.18	Abbildung bei einer Konkavlinse	20
2.19	<i>Dicke Linse</i>	20
2.20	Geometrie eines Doppellinsensystems	21
2.21	Bildposition	22
2.22	Ebener Spiegel	23
2.23	Gekrümmter Spiegel	23
2.24	Sphärische Aberration	25
2.25	Konvexspiegel	25
2.26	Bildentstehung beim Konkavspiegel	27
2.27	<i>Abbildungsmassstab</i>	27
2.28	Vereinfachung der Konstruktion	28
2.29	Abbildung bei einem konvexen Spiegel	29
2.30	Sphärische Aberration	30
2.31	Chromatische Aberration	30
2.32	Intensitätsverteilung im Fokus bei chromatischer Aberration	31
2.33	Charakteristische Kurve bei chromatischer Aberration	31
2.34	Astigmatismus	32
3.1	Das Auge	33
3.2	Weitsichtiges Auge: Links ohne Brille, rechts mit Korrektur	34
3.3	Kurzsichtiges Auge: Links ohne Brille, rechts mit Korrektur	34
3.4	Wirkungsweise einer Lupe	34
3.5	Schematische Skizze einer Spiegelreflexkamera	35

3.6	Strahlengang in einem Mikroskop	37
3.7	Das Teleskop	38
3.8	Das <i>Spiegelteleskop</i>	39
3.9	Aufnahmen des Hubble-Teleskops	39
3.10	Galaxien	40
3.11	Hubble-Teleskop	40
3.12	Prisma	41
3.13	Modell eines Oszillators	42
3.14	Resonanzkurven	42
3.15	Polarisierbarkeit: Modell	43
3.16	Federmodell für die Dispersion	43
3.17	Dispersionsrelation für Federketten mit zwei unterschiedlichen Atomen.	46
4.1	Huygenssches Prinzip	50
4.2	Huygenssches Prinzip	50
4.3	Huygenssches Prinzip	51
4.4	Huygenssches Prinzip	51
4.5	Huygenssches Prinzip	52
4.6	Huygenssches Prinzip	52
4.7	Geometrie der <i>Reflexion</i>	53
4.8	Geometrie der Brechung	55
4.9	Transport von Licht in einer Stufenindexfaser	56
4.10	Begründung des Reflexionsgesetzes mit dem <i>Fermatschen Prinzip</i>	58
4.11	Anwendung des Fermatschen Prinzips	58
4.12	Fermatsches Prinzip	60
4.13	Interferenzsumme	61
4.14	Polarisation durch Absorption in einem Drahtpolarisator	62
4.15	Polarisator und Analysator	63
4.16	Dichroismus in einem $NaVO_4Mn$ -Kristall	64
4.17	Polarisation durch Streuung an einem Teilchen	64
4.18	Brewster-Winkel	65
4.19	Wirkungsweise eines $\lambda/4$ -Plättchens oder eines $\lambda/2$ -Plättchens	67
4.20	Wellen in einem $\lambda/4$ -Plättchen	67
4.21	Wellen in einem $\lambda/2$ -Plättchen	70
4.22	Aufspaltung eines Lichtstrahls in einem doppelbrechenden Material	73
4.23	Doppelbrechung in einem $NaVO_4Mn$ -Kristall	74
4.24	Das Nicolsche Prisma	75
4.25	Definition der <i>s-Polarisation</i> und der <i>p-Polarisation</i>	76
4.26	Stetigkeitsbedingungen für Licht	78
4.27	Amplitudenverlauf für p- und s-Polarisation	80
4.28	Intensitätsverlauf für p- und s-Polarisation	80
4.29	Amplitude des elektrischen Feldes	81
4.30	Intensitätsverlauf für p-Polarisation	81
4.31	Verlauf der Intensität	84
4.32	Gewichtete Intensität	85
4.33	Momentaufnahme der Interferenz	86
5.1	Interferenz zweier Wellen	87
5.2	Aufbau des Michelson-Interferometers.	90

5.3	Stokessche Behandlung von Reflexion und Brechung (nach Hecht [Hec])	92
5.4	Strahlengang bei einem <i>Fabry-Perot-Etalon</i> (nach Hecht [Hec])	93
5.5	Transmission durch ein Fabry-Perot-Etalon	96
5.6	Reflexion an einem Fabry-Perot-Etalon	97
5.7	Bild einer ebenen Welle	98
5.8	Amplitude und Intensität	99
5.9	Interferenz bei Moire-Mustern	100
5.10	Interferenz zweier Wellen aus A und B	100
5.11	Strahlengang bei einem Doppelspalt	101
5.12	Beugung an einem Doppelspalt	103
5.13	Grafische Darstellung der Vektoraddition	104
5.14	Interferenz von drei Quellen	104
5.15	Vektordiagramm für die Interferenz	105
5.16	Interferenzmuster für zwei bis fünf <i>Punktquellen</i> , nicht normiert.	106
5.17	Interferenzmuster für zwei bis sieben sowie 20 <i>Punktquellen</i> , normiert	106
5.18	Interferenz an dünnen Schichten	107
5.19	Newtonsche Ringe in einem Glasplättchen	108
5.20	Newtonsche Ringe (rechts mit einem Fehler).	108
5.21	Newtonsche Ringe bei weissem Licht	109
5.22	Berechnung des Beugungsmusters an einem Einzelspalt.	109
5.23	Definition der Grössen.	110
5.24	Beugungsmuster als Funktion des Ablenkungswinkels	111
5.25	Beugungsmuster als Funktion der Spaltbreite.	111
5.26	Beugung an einem Doppelspalt	113
5.27	Beugung an einem 5-fach Spalt	114
5.28	Berechnung der Fresnelbeugung an einer Halbebene.	114
5.29	Die Cornu-Spirale.	116
5.30	Fresnelsches Beugungsmuster	117
5.31	Fresnelsches Beugungsmuster	117
5.32	Vergleich der Fresnelbeugung mit der Fraunhoferbeugung	119
5.33	Vergleich der Fresnelbeugung mit der Fraunhoferbeugung	119
5.34	Vergleich der Fresnelbeugung mit der Fraunhoferbeugung	120
5.35	Lichtdurchgang durch ein Gitter mit der Gitterkonstante g .	120
5.36	Blaze-Gitter	121
5.37	Aufzeichnung eines Hologramms	123
5.38	Auslesen eines Hologramms	124
5.39	Schematischer Aufbau von Hologrammen	125
5.40	Berechnung der Beugung an einer Öffnung	128
5.41	Die Beugung an einer ringförmigen Apertur.	130
5.42	Abbildung zweier punktförmiger, inkohärenter Quellen	130
5.43	Überlagerung zweier inkohärenter Punktquellen	131
5.44	Querschnitt zweier inkohärenter Punktquellen	131
6.1	Linsenübertragungsstrecke als Modell für einen Laserresonator.	135
6.2	Stabilitätsdiagramm für Strahlführoptiken mit Linsen.	137
6.3	Das Stabilitätsdiagramm für Spiegelresonatoren.	138
6.4	Konzentrischer Resonator	138
6.5	Konfokaler symmetrischer Resonator.	139

6.6	Resonator mit planparallelen Spiegeln.	139
6.7	Fokussierung eines Gaußschen Strahls.	145
6.8	Aufbau der Nahfeld-Messeinrichtung für Modenverteilungen.	147
6.9	Nahaufnahme von Glasfaser-Nahfeldsonden.	148
6.10	Transmission von Nahfeld-Glasfasersonden.	149
6.11	Wellenleitermoden für elliptische Wellenleiter	150
6.12	Moden von VCSELn	151
6.13	Modenstrukturen von VCSELn.	152
6.14	Modenstruktur von VCSELn.	153
6.15	Lasermode bei VCSEL.	154
6.16	Einfluss der Sonden auf die gemessenen Modenstrukturen.	155
6.17	Artefakte	156

Tabellenverzeichnis

2.1	Vorzeichenkonventionen für die Abbildung	28
3.1	Brechungsindex für Flintglas	45
3.2	Parameter für die Berechnung	46
4.1	Doppelbrechende Materialien	66
5.1	Interferenz und Phasendifferenz	88
5.2	Lage der Minima und Maxima	112
6.1	Matrizen für die Strahlausbreitung	134

Literaturverzeichnis

- [BSMM00] I.N. Bronštein, K.A. Semendjajew, G. Musiol, and H. Mühlig. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, 2000.
- [Dem08] Wolfgang Demtröder. *Experimentalphysik 2*. Experimentalphysik / Wolfgang Demtröder. Springer London, Limited, 2008.
- [Dyo95] R. B. Dyott. *Elliptical Fibre Waveguides*. Artech House, 1995.
- [FHT96] STScI und NASA Fotograf: Hubble-Teleskop, bzw. Helix-Team. Beschreibung: Hst detailansicht der knoten im helixnebel (ngc 7293) in der entdeckungs-aufnahme von 1996. Internet, 1996. Lizenz: Public Domain : NASA/STScI Public Domain.
- [Fis97] Markus Bernd Fischer. Polarisationsaufgelöste Messung der Modenstruktur von oberflächenemittierenden Lasern. Diplomarbeit, 1997.
- [Hec] E. Hecht. *Optik*. Oldenbourg, 3rd edition.
- [Kän78] Werner Känzig. *Physik I: Mechanik und Wellenlehre*. Verlag der Fachvereine Zürich, 1978.
- [Kne78] Fritz Kneubühl. *Repetitorium der Physik*. Teubner, 1978.
- [Mes06] Dieter Meschede. *Gerthsen Physik*. Springer Verlag, 23rd edition, 2006. QC 21/2006 G-1 Ex.2.
- [NAS97] B. Balick (University of Washington NASA, ESA & the Hubble Heritage Team (STScI/AURA). Acknowledgment: R. Sahai (Jet Propulsion Lab). The ant planetary nebula (menzel 3 or mz 3). stsci-prc2001-05. Internet, 1997.
- [NAS00a] The Hubble Heritage Team (AURA/STScI) NASA. The keyhole nebula, within ngc 3372. a mosaic of four april 1999 images by hubble's wide field planetary camera 2., Februar 2000.
- [NAS00b] The Hubble Heritage Team (STScI/AURA) NASA. Glowing eye of planetary nebula ngc 6751, 2000.
- [NAS10] Tuscaloosa) NASA, William C. Keel (University of Alabama. intergalactic pipeline of material flowing between two battered galaxies. Internet, 2010.
- [NU99] Paul Scowen NASA, Donald Walter (South Carolina State University) and Brian Moore (Arizona State University). Ngc 7635 or the bubble nebula. Internet, October and November 1997 and April 1999.

- [Pér96] José-Philippe Pérez. *Optik*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1996.
- [Som78] A. Sommerfeld. *Theoretische Physik IV, Optik*. Verlag Harri Deutsch, 1978.
- [TM04] Paul A. Tipler and Gene Mosca. *Physik*. Spektrum Verlag, 2nd edition edition, 2004. ISBN-13: 978-3827411648.
- [Yar75] A. Yariv. *Quantum Electronics, 2nd Edition*. John Wiley and Sons, New York., 1975.

Index

- Öffnungswinkel, 143
- Abbildungsfehler, 29–32
- Abbildungsgleichung, 24
- Abbildungsmassstab, 27, 37
- Aberration
 - chromatisch, 30
 - sphärisch, 25, 29
- Airy-Funktion, 96
- Akkommodation, 33
- Amplitude, 62, 63, 80, 81, 87–90, 98, 99, 110, 112, 114–117, 123, 129
- Analysator, 63
- Astigmatismus, 31
- Astronomie, 38
- Atomkern, 43
- Auflösung
 - Beugung, 126–132
 - Grenze, 131
- Auflösungsvermögen, 121, 131
- Auge, 33–34
- ausserordentliches Licht, 74

- Bahnebene der Erde, 11
- Beispiele
 - Polarisation, 73–75
- Besselfunktion nullter Ordnung, 129
- Beugung, 87–132
 - Einzelspalt, 109–112
 - Fraunhofer, 118
 - Fresnel, 115, 118
- Beugungsgitter, 120–126
- Beugungsmuster, 109, 111, 113, 116, 117, 126, 128
 - Fraunhofer, 128
 - Fresnel, 117
- Beugungsordnung, 121
- Bilderzeugung
 - Brechung, 14–22
- Bildkonstruktion
 - Linzen, 19–20
- Bildweite, 15, 16, 19, 21, 24, 26
- Blaze-Gitter, 121–122
- Bradley, 9
- Brechung, 14, 54–59
 - Bilderzeugung, 14–22
- Brechungsgesetz, 14, 58, 59
- Brechungsindex, 14, 16, 53, 55, 60, 66, 68, 75, 107, 108, 131
- Brechzahl, 54
- Brennpunkt, 17, 19, 26, 34, 35, 37, 111
- Brennweite, 16, 19, 21, 24, 26, 31, 33, 34, 36, 38, 134, 144
- Brewster-Winkel, 65, 66, 79

- chromatische Aberration, 30
- Cornu-Spirale, 116

- Dünne Linse, 16–19, 134
- Dichroismus, 62–64
- Dicke Linse, 20
- Dicke Linsen, 20
- Dielektrizitätskonstanten, 76
- Divergenz, 143
- Doppelbrechung
 - Polarisation, 66–70
- Doppelspalt, 101–103, 113–114
- Drehspiegelmethode, 12

- Ebene Welle, 98–99
- Effekt
 - photoelektrischer, 7
- einachsig negativ, 74
- einachsig positiv, 74
- Einfallebene, 65, 76
- Einstein, Albert, 7
- Einzelspalt, 109
 - Intensitätsverteilung, 110–112
- Ekliptik, 11
- Elementarwelle, 53

- Energiestrom, 76
 Etalon, 93
 Evaneszente Wellen, 85–86
- Fabry-Perot-Etalon, 93
 Fabry-Perot-Interferometer, 91–97
 Fabry-Perot-Spektrometer, 97
 Faltungssatz, 127–132
 Faltungstheorem, 127
 Feldkonstante
 dielektrisch, 54
 Fermat, Pierre de
 Prinzip, 57
 Fermatsches Prinzip, 57–61
 Interferenz, 59–61
 Fernrohr, 38
 Finesse, 97
 Finessefaktor, 96
 Fizeau, Armand, 11
 Foucault, Leon, 12
 Fourieroptik, 127
 Fraunhofer-Beugung, 118
 Fraunhofer-Näherung, 118
 Fraunhoferbeugung, 114–120
 Fraunhofersche Beugung, 118
 Fresnel
 Näherung, 115–118
 Fresnel, Augustin, 7
 Fresnel-Huygens
 Prinzip, 49
 Fresnel-Huygenssches Prinzip, 49–52
 Fresnelbeugung, 114–120
 Fresnelsche Formeln
 p-Polarisation, 79
 Fresnelsche Näherung, 115
 Fresnelscher Beugung, 118
- Gabor, Dennis, 122
 Gaussche Strahlen, 139–156
 $\omega(z)$, 143
 Gegenstandsweite, 15, 24
 Geometrische Optik, 7–32
 Begründung, 49–86
 Licht, 12–14
 Gesamtvergrößerung, 37
 Gesetz von Snellius, 14
 Glaskörper, 33
 Hauptachse, 74
- Hauptebene, 28
 Hohlspiegel
 Bildkonstruktion, 26–29
 Hologramme, 122–126
 Holographie, 122
 Hubble-Teleskop, 39
 Huygens
 Prinzip, 49–52
 Huygenssche Elementarwelle, 54
 Huygenssches Prinzip, 49–52
- Impulsantwort, 127–132
 Intensität, 53, 54, 60–63, 76, 77, 80, 81, 84, 85, 89, 91, 99, 101, 102, 111, 117, 124, 125, 131, 141, 143
 Interferenz, 87–132
 dünne Schicht, 106–109
 Fermatsches Prinzip, 59–61
 mehrere Quellen, 104–106
 Interferenzextrema, 101
 Interferenzmuster, 51, 52, 101, 104
- Jones-Matrix, 70–73
 Jones-Vektor, 70–73
- Kamera, 35–37
 Kaustik, 25
 Kohärenz, 88–97
 Kohärenzlänge, 89
 Kohärenzzeit, 88
 Konkavlinse, 20
 Konkavspiegel, 24
 Konvexlinse, 20
 Konvexspiegel, 24–26
 Kreiswellen, 49–51
 Kugelwellen, 49, 99–101
- Licht
 Geometrische Optik, 12–14
 Lichtgeschwindigkeit, 9–12, 74
 Lichtstrahl, 9, 12
 lineare Federkette, 43
 Linse, 16–22, 33, 37, 108, 135, 139, 140, 144
 Auge, 33
 dünn, 16–19, 134
 dick, 20
 Objektiv, 37
 Linsen

- Bildkonstruktion, 19–20
 - dick, 20
 - mehrere, 21–22
- Linsenkrümmung, 139
- Lupe, 34–35
 - Vergößerung, 35
- Matrix
 - Jones, 70–73
- Matrixformalismus, 133–139
- Michelson-Interferometer, 90–91
- Mikroskop, 36–38
- Moden, 146–156
 - Licht, 133–156
- monochromatisch, 12
- Näherung
 - paraxial, 100, 101
- Näherung:paraxial, 15
- Newton, Isaac, 7
- Oberfläche, 15, 16, 75, 76
- Oberflächennormalen, 76
- Objektiv, 29, 35–38
 - DIC, 66
- Objektivlinse, 37
- Okular, 37, 38
- Optische Elemente
 - Gauss'sche Strahlen, 144–146
- Optische Instrumente, 33–47
- ordentliches Licht, 74
- p-Polarisation, 76, 80, 81, 84, 85
- p-polarisiertes Licht, 76
- paraxiale Näherung, 15, 25
- Phasendifferenz, 88–97
- Phasengeschwindigkeit, 44
- photoelektrischer Effekt, 7
- Polarisation, 61–75
 - Beispiele, 73–75
 - Doppelbrechung, 66–70
 - p, 80, 81, 84, 85
 - Reflexion, 65–66
 - s, 76, 77, 80, 81, 84, 85
 - Streuung, 64
 - zirkular, 70
- Polarisator, 63
- Prinzip
 - Fermat, 57, 58
 - Huygens, 50–52
- Prinzip von Fresnel-Huygens, 49
- Prisma, 40–47
- Punktquelle, 106, 118, 131
 - inkohärent, 131
- Pupille
 - rund, 129
- R(z), 143
- Rayleighsches Auflösungskriterium, 130
- Reflexion, 26, 52–54, 56–58, 65, 76, 77, 85, 107, 108, 122
 - Polarisation, 65–66
- Reflexionsgesetz, 13
- Relation
 - Stokes, 92
- Resonatoren, 133–156
 - sphärische Spiegel, 138–139
- Rømer, Ole, 9
- s-Polarisation, 76, 77, 80, 81, 84, 85
- s-polarisiertes Licht, 76
- Sammellinse, 139
- Sehwinkel, 35, 38
- Snellius, 59
- Spektrallinie, 121
- Spektrographen, 120–126
- sphärische Aberration, 25, 29
- Spiegel
 - eben, 22–23
 - sphärisch
 - Bilderzeugung, 23
- Spiegelteleskop, 39
- Stabilität, 137–138
- Stehende Wellen, 89–90
- Stokessche Relation, 92
- Strahl
 - paraxial, 27, 28, 133, 139, 140
- Strahldurchmesser, 143
- Streuung
 - Polarisation, 64
- Symbole, 157–164
- Teleskop, 38, 38, 39, 40
 - Hubble, 39
 - Spiegel, 39
- Totalreflexion, 55–57
- Vektor
 - Jones, 70–73
- Vergleich

- Fraunhofer und Fresnel, 118–120
- Vergößerung, 20, 37, 38
 - Lupe, 35, 37
 - Okular, 37
- Volumenhologramme, 126
- Welle
 - eben, 98–99
 - Kugel, 99–101
 - paraxial, 105
- Wellen
 - 2D, 97–101
 - 3D, 97–101
 - Vektoraddition, 103–104
- Wellenbild, 51
- Wellenlänge, 54
- Wellenleiter, 150, 156
 - elliptisch, 150
 - rechteckförmig, 156
- Wellenvektor, 53
- Winkel
 - Brewster, 65, 66
- Winkelvergrößerung, 37
- Young, Thomas, 7
- Zerstreuungslinse, 19
- Zwischenbild, 38