



Entscheidungstheorie Teil 3

Thomas Kämpke

Inhalt

- St. Petersburg „Paradoxon“ (Bernoulli 1732) 
- Präferenzfunktionen 
- Mittelpunktsmethode zur Bestimmung von Wertfunktionen über Intervallen (eindimensional) 
- Methode der Sicherheitsäquivalente zur Bestimmung von Nutzenfunktionen über Intervallen (eindimensional) 
- Risikoeinstellung 

St. Petersburg „Paradoxon“ (Bernoulli 1732) (1/1)

Eine Münze mit Kopf und Zahl wird so oft geworfen, bis Kopf erscheint.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze dreimal geworfen wird?

$$p(Z_1, Z_2, K_3) = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

Wie groß ist die erwartete Auszahlung dieser **Lotterie**?

$$\begin{aligned} E[L] &= 2^0 p(K_1) + 2^1 p(Z_1, K_1) + \dots + 2^k p(Z_1, Z_2, \dots, Z_k, K_k) + \dots \\ &= 1 * \frac{1}{2} + 2^1 * \frac{1}{2^2} + \dots + 2^k * \frac{1}{2^{k+1}} + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} + \dots = \infty \end{aligned}$$

Paradoxon

Niemand ist bereit, einen hohen Preis für die Teilnahme an der Lotterie zu zahlen. Daraus kann man schließen, dass der Erwartungswert kein geeignetes deskriptives Modell für Entscheidungen bei Unsicherheit darstellt.

Präferenzfunktionen (1/29)

Präferenzfunktionen stellen strikte Präferenzordnungen dar, d.h.

$$a \prec b \Leftrightarrow f(a) < f(b) \quad \forall a, b \in \mathcal{A}$$

Deterministische und stochastische Situationen gleichermaßen; zunächst.

Deterministisch: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$.

Was aber, wenn Alternativen in Würfeln vs. nicht Würfeln oder Lotto spielen
vs. nicht Lotto spielen besteht? Idee (v. Neumann)

Versuch $f(a)$ als Erwartungswert darzustellen.

Präferenzfunktionen (2/29)

Dazu fasst man die Alternativen als W-Masse oder W-Verteilungen über Menge M auf.

Alternativen $a, b, \dots = P, Q, \dots$

Alternativenmenge $\mathcal{A} = \mathcal{P}$

Grundvoraussetzung

\mathcal{P} konvex, d.h. mit $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ ist auch

$$\alpha P_1 + (1 - \alpha)P_2 \in \mathcal{P} \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

Präferenzfunktionen (3/29)

Beispiel

$$P_1^X(i) = P_1(X = i) = \frac{1}{6}, \quad i = 1, \dots, 6$$

$$P_2^X(i) = P_2(X = i) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & i = 1, 3, 5 \\ 0, & i = 2, 4, 6 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{\alpha = \frac{1}{3}}}$$

Präferenzfunktionen (4/29)

Beispiel für die Konvexkombination von zwei W-Massen

$$P^X(i) = \frac{1}{3}P_1^X(i) + \frac{2}{3}P_2^X(i)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{3} * \frac{1}{6} + \frac{2}{3} * \frac{1}{3} = \frac{5}{18}, & i = 1, 3, 5 \\ \frac{1}{3} * \frac{1}{6} + 0 = \frac{1}{18}, & i = 2, 4, 6 \end{cases}$$

$$M = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \frac{5}{18} & \frac{1}{18} & \frac{5}{18} & \frac{1}{18} & \frac{5}{18} & \frac{1}{18} \end{array} \right\}$$

Präferenzfunktionen (5/29)

Für eine konvexe Menge \mathcal{P} von W -Massen über M , die alle Einpunktmasse enthält, gibt es Funktion $u: M \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$P \prec Q \Leftrightarrow \int_M u dP < \int_M u dQ$$

genau dann, wenn

1. \prec ist strikte Präferenzordnung über \mathcal{P}
2. („Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen“) $\forall P, Q, R \in \mathcal{P}$ und $\forall \alpha \in (0,1)$

$$P \prec Q \Rightarrow \alpha P + (1 - \alpha)R \prec \alpha Q + (1 - \alpha)R$$

3. („Archimedisches Axiom“ oder „Stetigkeit“)

$\forall P, Q, R \in \mathcal{P}$ mit $P \prec Q \prec R$ gibt es $\alpha, \beta \in (0,1)$ so, dass

$$\alpha P + (1 - \alpha)R \prec Q \prec \beta P + (1 - \beta)R$$

Präferenzfunktionen (6/29)

Die Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen ist erforderlich zur Verträglichkeit mit Integralen!

$$\alpha P + (1 - \alpha)R \prec \alpha Q + (1 - \alpha)R \Leftrightarrow \int_M u d(\alpha P + (1 - \alpha)R) < \int_M u d(\alpha Q + (1 - \alpha)R)$$

$$\Leftrightarrow \alpha \int_M u dP + (1 - \alpha) \int_M u dR < \alpha \int_M u dQ + (1 - \alpha) \int_M u dR$$

$$\stackrel{1 > \alpha > 0}{\Leftrightarrow} \int_M u dP < \int_M u dQ$$

$$\Leftrightarrow P \prec Q$$

→ „Minimalforderung“

Präferenzfunktionen (8/29)

$E_p u = \int_M u dP$ heisst Erwartungsnutzen

Bernoullinutzen

v. Neumann Morgenstern - Nutzen

Nutzenfunktionen werden auch als Präferenzfunktionen bezeichnet, obwohl dies nicht ganz korrekt ist:

$$a \prec b \Leftrightarrow f(a) < f(b)$$

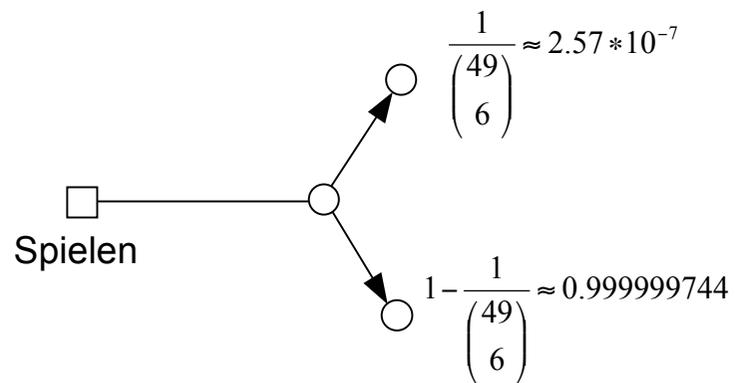
$$P \prec Q \Leftrightarrow \begin{array}{ccc} f(P) < f(Q) & & \\ \parallel & & \parallel \\ \int_M u dP & & \int_M u dQ \end{array}$$

„Präferenzfunktionen“ sind Integrale bzgl. „Nutzenfunktionen“

Präferenzfunktionen (9/29)

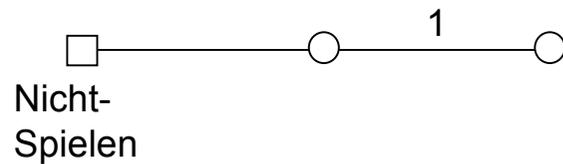
Vereinfachtes Lotto

Spielen oder Nicht-Spielen?



€ 10⁶ Gewinn

€ 1 Verlust (Einsatz)



€ 0 weder Gewinn noch Verlust

Präferenzfunktionen (10/29)

Erwartungswert

$$\begin{aligned} E_S &= \frac{1}{\binom{49}{6}} * 10^6 + \left(1 - \frac{1}{\binom{49}{6}} \right) * (-1) \\ &= 0.071942 - 0.999999744 \\ &= -0.928057744 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{NS} &= 1 * 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

⇒ Nicht-Spielen besser als Spielen gemäß reinem Erwartungswert

Präferenzfunktionen (11/29)

Erwartungsnutzen

$$E_S = \frac{1}{\binom{49}{6}} * u(10^6) + \left(1 - \frac{1}{\binom{49}{6}} \right) * u(-1)$$

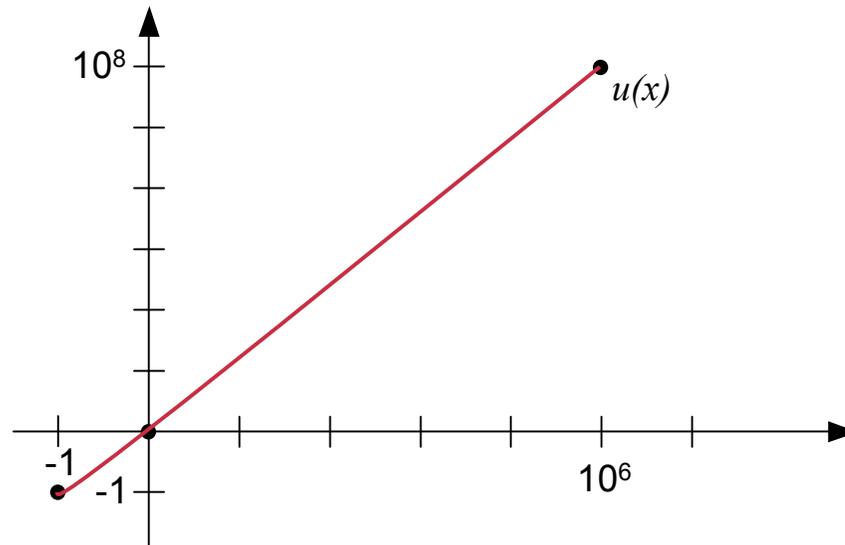
$$\frac{u(-1) = -1}{u(10^6) = 10^8} \\ \approx 2.56 * 10^{-7} * 10^8 - 0.999999744$$

$$\approx \underline{\underline{24.6}}$$

$$E_{NS} = 1 * u(0) = 0$$

Präferenzfunktionen (12/29)

Spielen ist „sinnvoller“ als Nicht-Spielen gemäß Erwartungsnutzen
z.B. für diese Nutzenfunktion:



Nutzenfunktion verzerrt die Ergebnisse der Zufallsanteile im
Bewertungsproblem

Präferenzfunktionen (13/29)

Nutzenfunktionen verschiedener Personen können verschieden sein.

Nutzenfunktionen ein und derselben Person in verschiedenen Situationen können verschieden sein. Es gibt kein „richtig“ oder „falsch“.

Erwartungsnutzen ist mächtiger Vorteil, aber nicht beliebig mächtig!

Präferenzfunktionen (14/29)

Allais Beispiel (Allais“paradoxon“)

$$P_1 = \varepsilon_{10^6}$$

$$P_2 = 0.01 * \varepsilon_0 + 0.89 * \varepsilon_{10^6} + 0.1 * \varepsilon_{5*10^6}$$

$$P_3 = 0.9 * \varepsilon_0 + 0.1 * \varepsilon_{5*10^6}$$

$$P_4 = 0.89 * \varepsilon_0 + 0.11 * \varepsilon_{10^6}$$

Präferenzfunktionen (15/29)

$P_1 \succ P_2$ (bei sicherem Gewinn von 1Mio. geht man nicht das Risiko ein, mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{100}$ nicht zu gewinnen)

$P_3 \succ P_4$ (bei ungefähr gleicher Wahrscheinlichkeit nicht zu gewinnen, setzt man auf 5Mio. statt 1Mio.)

Diese beiden Relationen sind nicht mittels vNM Nutzenfunktion darstellbar!
Nutzenfunktion normiert zu $u(0) = 0$ und $u(5 \cdot 10^6) = 1$, sofern es sie gibt

Präferenzfunktionen (16/29)

$$P_1 \succ P_2 \Leftrightarrow u(10^6) > 0.01 * \underbrace{u(0)}_{=0} + 0.89 * u(10^6) + 0.1 * \underbrace{u(5 * 10^6)}_{=1}$$

$$\Leftrightarrow u(10^6) > 0.89 * u(10^6) + 0.1$$

$$\Leftrightarrow 0.11 * u(10^6) > 0.1$$

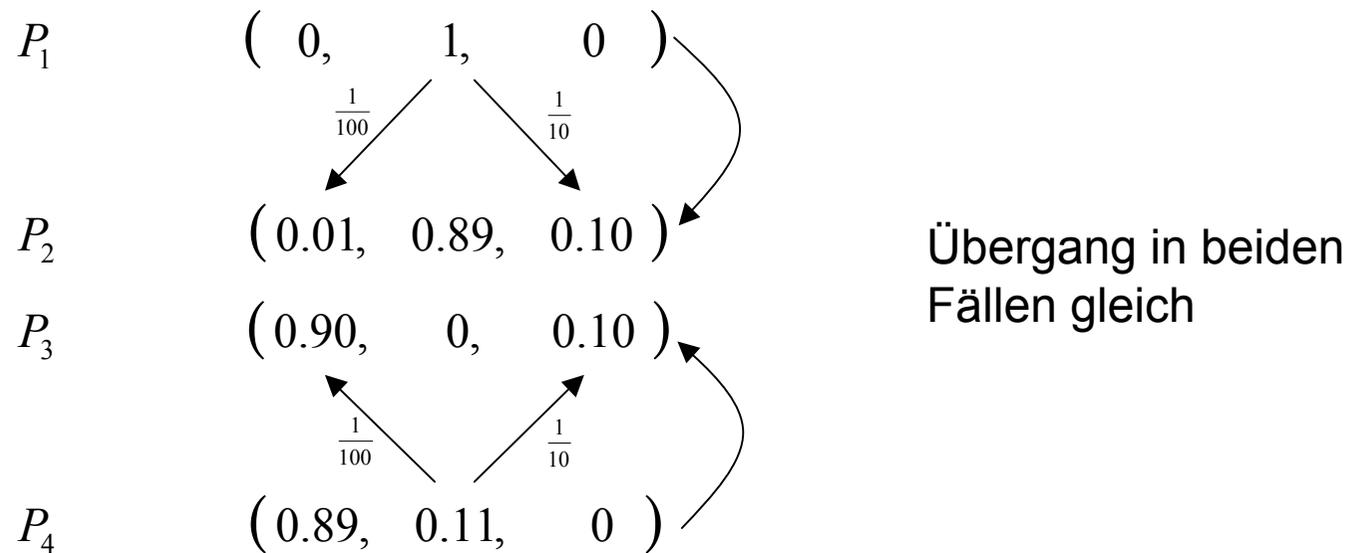
$$P_3 \succ P_4 \Leftrightarrow 0.9 * \underbrace{u(0)}_{=0} + 0.1 * \underbrace{u(5 * 10^6)}_{=1} > 0.89 * \underbrace{u(0)}_{=0} + 0.11 * u(10^6)$$

$$\Leftrightarrow 0.1 > 0.11 * u(10^6)$$

⇒ keine Darstellung mittels Erwartungsnutzen!

Präferenzfunktionen (17/29)

Alternative Darstellung der Wahrscheinlichkeiten



Daher sollte Zuwachs in beiden Fällen als Verbesserung oder Verschlechterung angesetzt werden!

Alternative Bezeichnung „Common Consequence Effekt“

Präferenzfunktionen (18/29)

Invertieren („Kippen“) von Präferenzen auch bei Approximationen möglich

Folgen von Nutzenfunktionen	$u_i \rightarrow u$	$(i \rightarrow \infty)$
Folgen von W-Massen	$P_i \rightarrow P$	$(i \rightarrow \infty)$
	$Q_i \rightarrow Q$	$(i \rightarrow \infty)$

Dann ist $\int_M u_i dR_i < \int_M u_i dQ_i$

und $\int_M u dP > \int_M u dQ$

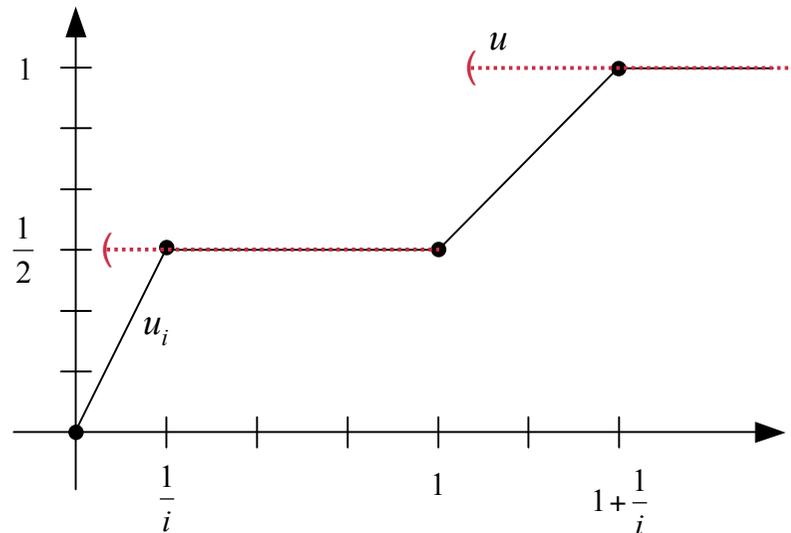
möglich

Präferenzfunktionen (19/29)

Beispiel

$$P_i = \frac{1}{i} \varepsilon_{\frac{1}{i}} + \left(1 - \frac{1}{i}\right) \varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_1 = P \quad (i \rightarrow \infty)$$

$$Q_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{\frac{1}{2i}} + \frac{1}{2} \varepsilon_{1+\frac{1}{i}} \rightarrow \frac{1}{2} \varepsilon_0 + \frac{1}{2} \varepsilon_1 = Q \quad (i \rightarrow \infty)$$



Präferenzfunktionen (20/29)

$$\int u_i dP_i = \underbrace{u_i\left(\frac{1}{i}\right)}_{=\frac{1}{2}} * \frac{1}{i} + \underbrace{u_i(1)}_{=\frac{1}{2}} * \left(1 - \frac{1}{i}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\int u_i dQ_i = \underbrace{u_i\left(\frac{1}{2i}\right)}_{=\frac{1}{4}} * \frac{1}{2} + \underbrace{u_i\left(1 + \frac{1}{i}\right)}_{=1} * \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$$

aber

$$\int u dP = u(1) = \frac{1}{2}$$

$$\int u dQ = \underbrace{u(0)}_{=0} * \frac{1}{2} + \underbrace{u(1)}_{=\frac{1}{2}} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Präferenzfunktionen (21/29)

Bei der Inkonsistenz der Notation üblich

Deterministischer Fall	$f(a), f(b), f(x), \dots$	Präferenzfunktion
Stochastischer Fall	$f(P) = \int_M u(x) dP(x)$	Präferenzfunktion
		

Nutzenfunktionen werden auch als Präferenzfunktionen bezeichnet!

$$f(x) = w(x) = v(x)$$

$$f(x) = u(x)$$

Wertfunktion (value function) deterministisch
 Nutzenfunktion (utility function) stochastisch

Präferenzfunktionen (22/29)

Eine Präferenzfunktion ist **ordinal** bestimmt, wenn sie eindeutig bis auf monotone Transformation ist, d.h. insbesondere mit u ist auf $g \circ u$ eine Präferenzfunktion, wobei $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g \uparrow$

Eine Präferenzfunktion ist **kardinal** bestimmt, wenn sie eindeutig bis auf monotone affine Transformation ist, d.h. insbesondere mit u ist auch $a * u + b$, $a > 0$, eine Präferenzfunktion.

Beispiel

Präferenzfunktion $u(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ nur ordinal bestimmt.

Dann ist auch für $g(z) = \sqrt{z}$

$$g \circ u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2} = x_1 + x_2$$

Präferenzfunktion für dieselbe Präferenzordnung. Gemischte Terme können Wechselwirkungen vortäuschen, die nicht vorliegen!

Präferenzfunktionen (23/29)

Eine Nutzenfunktion ist kardinal bestimmt, wenn es eine beste und eine schlechteste Alternative gibt.

x_* schlechte Alternative
 x^* beste Alternative

Nachweis Kardialität u_1, u_2 zwei beliebige Nutzenfunktionen

$$\varepsilon_{x_*} \prec \varepsilon_{x^*} \Leftrightarrow \int u_1 d\varepsilon_{x_*} < \int u_1 d\varepsilon_{x^*}$$

$$\Leftrightarrow u_1(x_*) < u_1(x^*)$$

$$\Leftrightarrow u_1(x^*) - u_1(x_*) > 0$$

Genauso $u_2(x^*) - u_2(x_*) > 0$

Präferenzfunktionen (24/29)

Dann stellen auch $u_1^+(x) = \frac{u_1(x) - u_1(x_*)}{u_1(x^*) - u_1(x_*)}$

und $u_2^+(x) = \frac{u_2(x) - u_2(x_*)}{u_2(x^*) - u_2(x_*)}$ die selbe Präferenzrelation dar, denn

ist $u_1^+(x)$ positive affine Transformation von $u_1(x)$ und

$u_2^+(x)$ positive affine Transformation von $u_2(x)$

$u_1^+(x), u_2^+(x)$ beide zu Werten in $[0,1]$ normiert.

Es gilt nun $u_1^+(x) = u_2^+(x) \quad \forall x$

Präferenzfunktionen (25/29)

Wegen $\varepsilon_{x^*} \prec \varepsilon_x \prec \varepsilon_{x^*}$ gibt es $p \in (0,1)$ (Archim Axiom)

mit $\varepsilon_x \sim p\varepsilon_{x^*} + (1-p)\varepsilon_{x^*}$

$$\Rightarrow u_1^+(x) = p \underbrace{* u_1^+(x_*)}_{=0} + (1-p) \underbrace{* u_1^+(x^*)}_{=1} = 1-p$$

$$u_2^+(x) = p \underbrace{* u_2^+(x_*)}_{=0} + (1-p) \underbrace{* u_2^+(x^*)}_{=1} = 1-p,$$

also $u_1^+(x) = u_2^+(x)$

$$\frac{u_1(x) - u_1(x_*)}{u_1(x^*) - u_1(x_*)} = \frac{u_2(x) - u_2(x_*)}{u_2(x^*) - u_2(x_*)}$$

$$\Rightarrow u_1(x) = \underbrace{\frac{u_1(x^*) - u_1(x_*)}{u_2(x^*) - u_2(x_*)}}_{a>0} u_2(x) + u_1(x_*) - \underbrace{\frac{u_1(x^*) - u_1(x_*)}{u_2(x^*) - u_2(x_*)}}_{=b} u_2(x)$$

$$\Rightarrow u_1(x) = a * u_2(x) + b.$$

Präferenzfunktionen (26/29)

Eine Wertfunktion ist nicht notwendig kardinal bestimmt, auch wenn es eine beste und eine schlechteste Alternative gibt. Dazu ist mehr erforderlich, z.B. die Darstellbarkeit von Präferenzen über Zuwächse.

$$a \prec b \Leftrightarrow v(a) < v(b) \quad \text{und}$$

$$a \rightarrow b \prec c \rightarrow d \Leftrightarrow v(b) - v(a) < v(c) - v(d)$$

Mittelpunktseigenschaft

Zu $a \prec b$ gibt es c mit $a \prec c \prec b$ und $a \rightarrow c \sim c \rightarrow b$.

Eine stetige Wertfunktion ist kardinal bestimmt, wenn es eine beste und eine schlechteste Alternative gibt und die zugrunde liegende Präferenz die Mittelpunktseigenschaft hat.

Präferenzfunktionen (27/29)

Zu zwei Wertfunktionen v_1, v_2 wird wieder die Gleichheit der normierten Funktion

$$v_1^+(x) = \frac{v_1(x) - v_1(x_*)}{v_1(x^*) - v_1(x_*)}$$

$$v_2^+(x) = \frac{v_2(x) - v_2(x_*)}{v_2(x^*) - v_2(x_*)}$$

hergeleitet, d.h. $v_1^+(x) = v_2^+(x)$

Präferenzfunktionen (28/29)

Zu x_* und x^* gibt es \bar{x} mit $x_* \rightarrow \bar{x} \sim \bar{x} \rightarrow x^*$

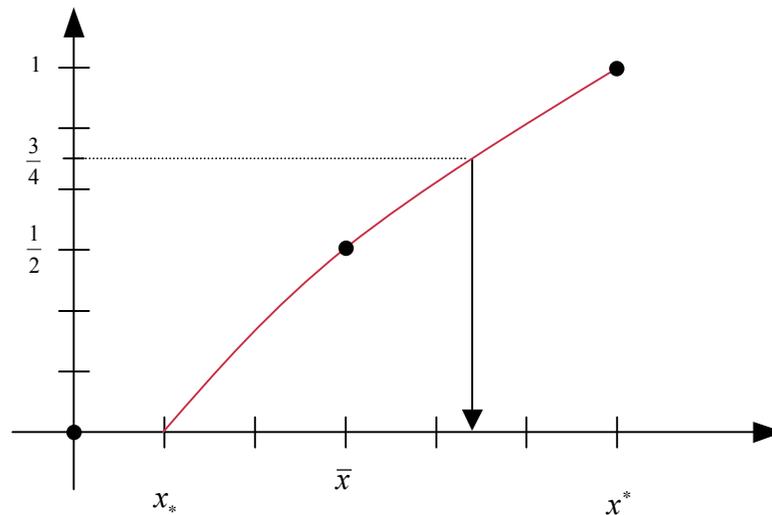
$$v_1^+(\bar{x}) - \underbrace{v_1^+(x_*)}_{=0} = \underbrace{v_1^+(x^*)}_{=1} - v_1^+(\bar{x})$$

$$2v_1^+(\bar{x}) = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} v_1^+(\bar{x}) = \frac{1}{2} \\ \text{Genauso: } v_2^+(\bar{x}) = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow v_1^+(\bar{x}) = v_2^+(\bar{x})$$

Präferenzfunktionen (29/29)

Für andere Werte als $\frac{1}{2}$ wird das Verfahren wiederholt \rightarrow



einschachteln.

$$\Rightarrow v_1^+(x) = v_2^+(x) \quad \forall x$$

$$\Rightarrow v_1(x) = a * v_2(x) + b, \quad a > 0, \text{ wie bei Nutzenfunktionen.}$$

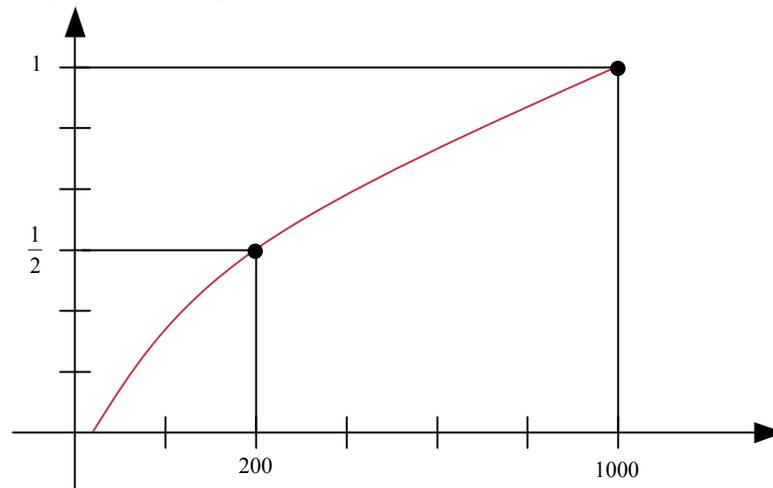
Mittelpunktmethode zur Bestimmung von Wertfunktionen über Intervallen (eindimensional) (1/4)

Für $x_1 < x_2$ und x gesucht mit

$$x_1 \rightarrow x \sim x \rightarrow x_2$$

(„Welcher Mittelpunkt halbiert den Wertzuwachs?“)

Beispiel $x_1 = 0$ $x_2 = 1000$ und $x = 200$

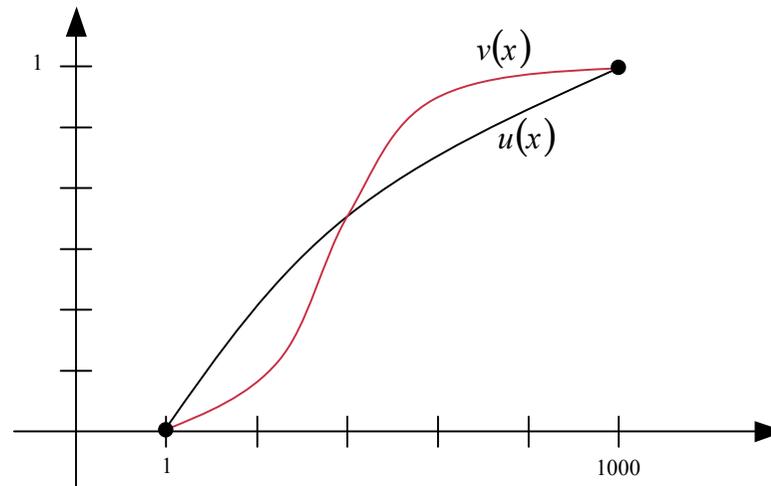


Dann $x_1 = 200$ $x_2 = 1000$ $\Rightarrow ?$ etc.

Iteration, zur Bestimmung weiterer Punkte der Wertfunktion.

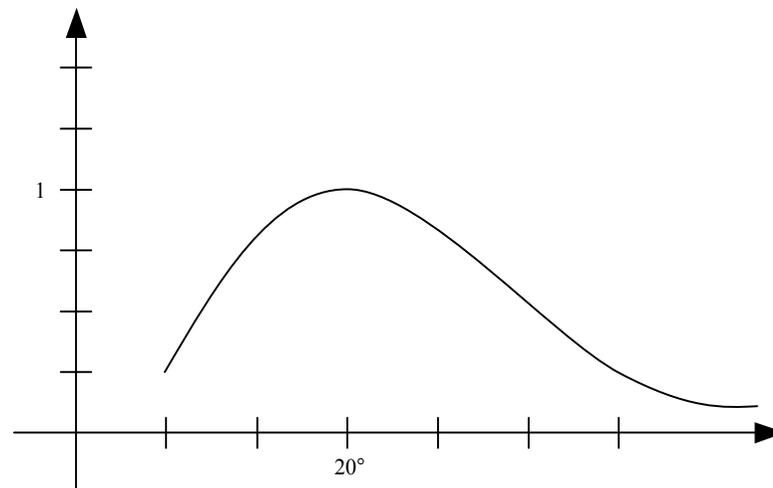
Mittelpunktmethode zur Bestimmung von Wertfunktionen über Intervallen (eindimensional) (2/4)

Wert- und Nutzenfunktionen können verschieden sein, selbst wenn sie kardinal bestimmt und gleichartig normiert sind.



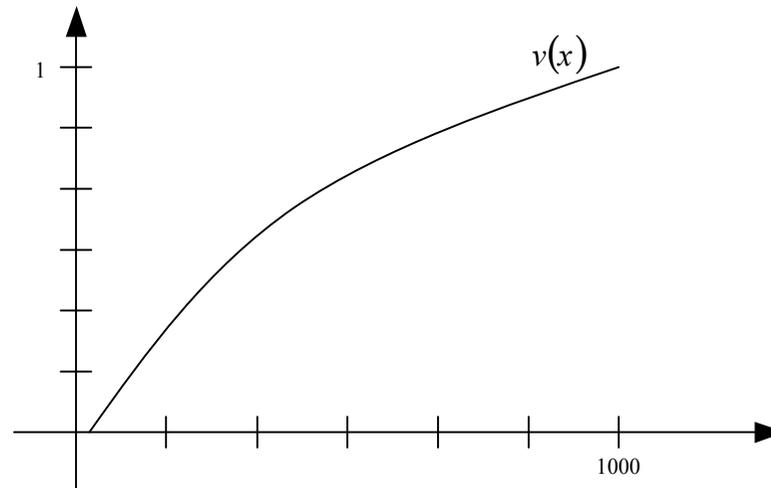
Mittelpunktmethode zur Bestimmung von Wertfunktionen über Intervallen (eindimensional) (3/4)

Wert- und Nutzenfunktionen müssen nicht monoton sein:
Wertfunktion zur Bewertung von Umgebungstemperatur



Mittelpunktmethode zur Bestimmung von Wertfunktionen über Intervallen (eindimensional) (4/4)

Oft ergeben sich **konkave** Funktionen



„Prinzip“ des abnehmenden Grenz“nutzens“
(„Die ersten 200€ sind die wichtigsten“)

Methode der Sicherheitsäquivalente zur Bestimmung von Nutzenfunktionen über Intervallen (eindimensional) (1/3)

Sicherheitsäquivalent eines W-Masses („Lotterie“) ist ein sicheres Ergebnis (Wahrscheinlichkeit 1), das als gleichwertig angesehen wird.

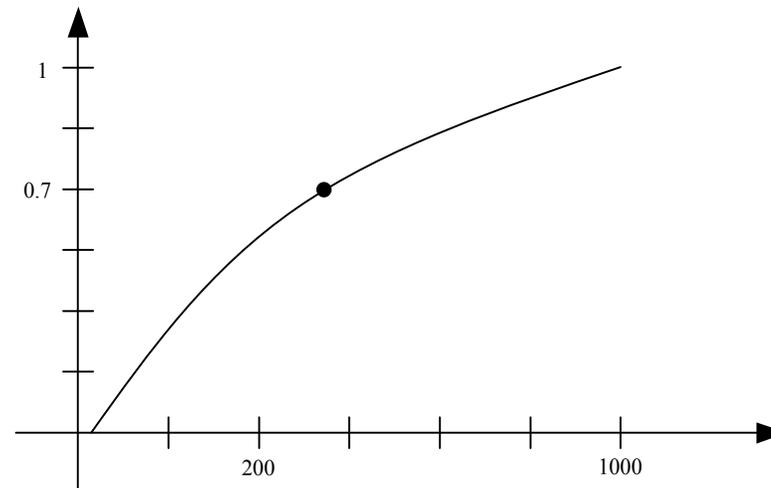
Beispiel



(Die Frage ist **nicht**, wie viel ist man bereit zu zahlen, um an Lotterie teilzunehmen. Die Frage ist: gegen welche sichere Alternative tauscht man Lotterie ein bzw. umgekehrt, gegen welche Lotterie tauscht man sichere Alternative?)

$$\int u dP = 0.3 * \underbrace{u(0)}_{=0} + 0.7 * \underbrace{u(1000)}_{=1} = 0.7 = u(200)$$

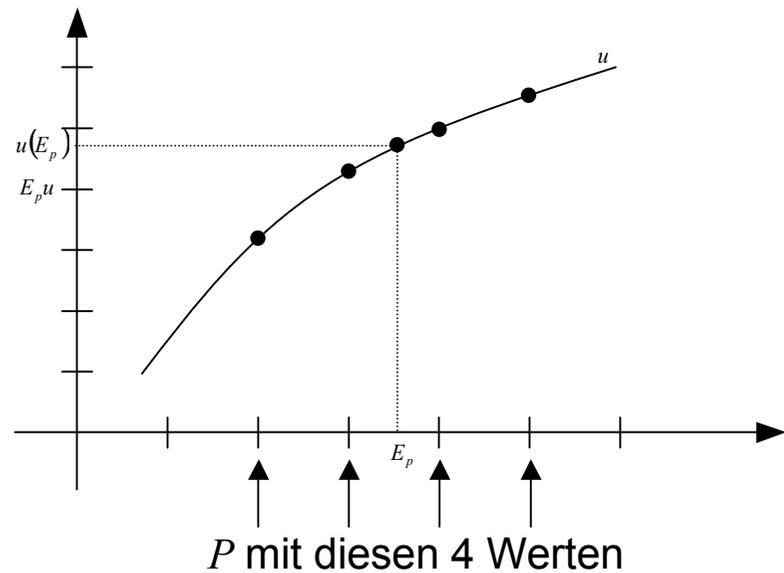
Methode der Sicherheitsäquivalente zur Bestimmung von Nutzenfunktionen über Intervallen (eindimensional) (2/3)



Auch Nutzenfunktionen sind häufig konkav

$$u \text{ konkav} \Rightarrow \underbrace{\int u dP}_{= E_p u} = \text{Erwartungsnutzen} \leq \underbrace{u(E_p)}_{= \text{Nutzen des Erwartungswerts}} \quad (\text{Jensen'sche Ungleichung})$$

Methode der Sicherheitsäquivalente zur Bestimmung von Nutzenfunktionen über Intervallen (eindimensional) (3/3)



„Risikoverision“

Risikoeinstellung (1/3)

eindimensionale Nutzenfunktion u , $u \uparrow$

$$\text{Arrow Pratt Risikomass } R(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

Je grösser $R(x)$, desto mehr Risikoaversion liegt vor.
(pos. Werte: u konkav vs. neg. Werte: u konvex)

Vorteil des Risikomasses

Invariant unter pos. affinen Transformationen. D.h. egal welche Nutzenfunktion vorliegt (für dieselbe Präferenzordnung), R ist immer gleich. R hängt also nicht vom „Repräsentanten $u(x)$ “ ab.

Risikoeinstellung (2/3)

$R(x)$ ist Funktion, d.h. Risikomass kann sich mit Werten ändern.

$R(x) \uparrow x$, $R(x) \downarrow x$ aber auch $R(x) = \text{const}$ möglich.

$$u(x) = -e^{-cx} \quad x > 0, \quad c > 0$$

$$\Rightarrow u'(x) = ce^{-cx}, \quad u''(x) = -c^2 e^{-cx}$$

$$\Rightarrow R(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = c$$

Viele Varianten der Kennzahlen von Nutzenfunktionen zur Beschreibung der Risikoeinstellung.

Dies kann in einem allgemeinen Sinn aber nicht genügen

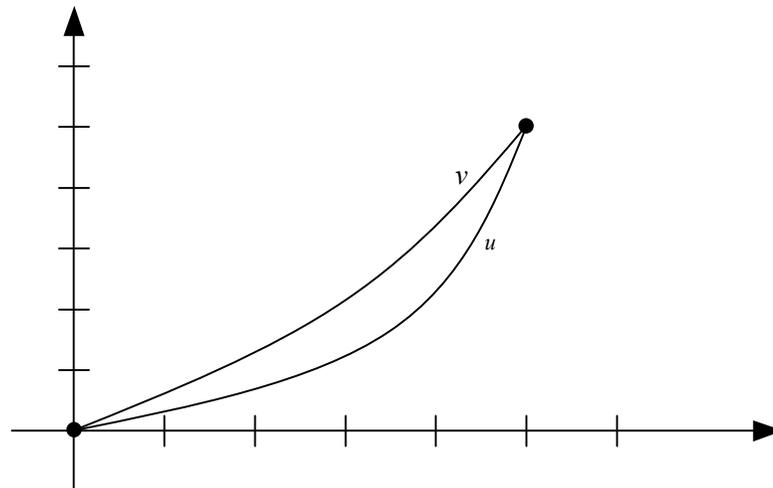
→ Mafiastation für Erpressung

Risikoeinstellung (3/3)

⇒ Risikoeinstellung wird durch **Nutzen- und Wertfunktion** ausgedrückt

$$u(x) = f(v(x))$$

f beschreibt Risikobereitschaft



„ u mehr durchgegeben als v “ \Leftrightarrow wahre Risikobereitschaft