Prädikatenlogik

Erweiterung der Aussagenlogik durch

-Quantoren

-Funktions- und Prädikatsymbole

-Variablen (nicht umbedingt Boolesche)

Syntax

Def: Terme

1. Jede Variable ist ein Term.

2. Falls f ein k-stelliges Funktionssymbol ist und falls $t_1, \ldots, t_k$ Terme sind, so ist auch $f(t_1, \ldots, t_k)$ ein Term.

Prädikatenlogische Formeln

1. Falls P ein k-stelliges Prädikatsymbol ist, und falls $t_1, \ldots, t_k$ Terme sind, dann ist $P(t_1, \ldots, t_k)$ eine Formel.

2. Für jede Formel F ist auch $\neg F$ eine Formel.

3. Für alle Formeln F und G sind auch $(F \wedge G)$ und $(F \vee G)$ Formeln.

4. Falls x eine Variable ist und F eine Formel, so sind auch $\exists x F$ und $\forall x F$ Formeln.

Atomare Formeln nennen wir genau die, die gemäß 1. aufgebaut sind.

Die *Matrix* einer Formel F ist diejenige Formel, die man aus F erhält, indem jedes Vorkommen von $\exists$ bzw. $\forall$, samt der dahinterstehenden Variablen gestrichen wird. Symbolisch bezeichnen wir die Matrix der Formel F mit F^*.

Ein Vorkommen der Variablen x in der Formel F heißt *gebunden*, falls x in einer Teilformel von F der Form $\exists xG$ oder $\forall xG$ vorkommt. Andernfalls heißt dieses Vorkommen von x *frei*.

Eine Formel ohne Vorkommen einer freien Variablen heißt *geschlossen* oder eine *Aussage*.

Semantik der Prädikatenlogik

Eine *Struktur* $\mathcal{A}$ zu einer gegebenen Signatur besteht aus der Angabe einer nicht-leeren *Grundmenge*, sowie der Angabe von Funktionen und Prädikaten (d.h. Relationen) auf dieser Grundmenge.

$$\mathcal{A} = (M, f_1, \ldots, f_k, P_1, \ldots, P_m)$$

Sei F eine Formel ohne freie Variablen und $\mathcal{A}$ eine Struktur, die zur selben Signatur gehören. Dann heißt $\mathcal{A}$ zu F *passend* und wir können definieren, ob $\mathcal{A}$ ein **Modell** für F darstellt ($\mathcal{A} \models F$) oder nicht ($\mathcal{A} \not\models F$).

1. Falls F die Form $F = \neg G$ hat, so ist $\mathcal{A} \models F$ genau dann, wenn $\mathcal{A} \not\models G$.

2. Falls F die Form $F = (G \wedge H)$ hat, so ist $\mathcal{A} \models F$ genau dann, wenn $\mathcal{A} \models G$ und $\mathcal{A} \models H$.

3. Falls F die Form $F = (G \vee H)$ hat, so ist $\mathcal{A} \models F$ genau dann, wenn $\mathcal{A} \models G$ oder $\mathcal{A} \models H$.

4. Falls F die Form $F = \forall x G$ hat, so ist $\mathcal{A} \models F$ genau dann, wenn für alle Elemente m des Grundbereichs M von $\mathcal{A}$ gilt: $\mathcal{A}[x/m] \models G$.

5. Falls F die Form $F = \exists x G$ hat, so ist $\mathcal{A} \models F$ genau dann, wenn es ein Element m des Grundbereichs M gibt mit: $\mathcal{A}[x/m] \models G$.

6. Falls F eine atomare Formel ist, also die Form $F = P(t_1, \ldots, t_k)$ hat, so sind zu diesem Zeitpunkt bereits alle in den Termen vorkommenden Variablen an Werte des Grundbereichs gebunden. Wir notieren diese Variablenbindungen durch $[\overline{x}/\overline{m}]$. Dann gilt $\mathcal{A}[\overline{x}/\overline{m}] \models F$ genau dann, wenn

$$P^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}[\overline{x}/\overline{m}]}, \ldots, t_k^{\mathcal{A}[\overline{x}/\overline{m}]})$$

gilt.

Normalformen

Def: Zwei prädikatenlogische Formeln F und G sind *äquivalent*, $(F \equiv G)$ falls für alle sowohl zu F als auch zu G passenden Strukturen $\mathcal{A}$ gilt $\mathcal{A} \models F$ genau dann, wenn $\mathcal{A} \models G$.

$$\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$$

Def: G ist logische Folgerung von F $(F \models G)$ falls für alle sowohl zu F als auch zu G passenden Strukturen $\mathcal{A}$ gilt $\mathcal{A} \models F$ dann $\mathcal{A} \models G$.

$$F \models G \Leftrightarrow \models F \rightarrow G$$

Satz: Seien F und G beliebige Formeln. Dann gilt:

1. $\neg\forall x F \equiv \exists x \neg F$

   $\neg\exists x F \equiv \forall x \neg F$

2. $(\forall x F \wedge \forall x G) \equiv \forall x (F \wedge G)$

   $(\exists x F \vee \exists x G) \equiv \exists x (F \vee G)$

3. $\forall x \forall y F \equiv \forall y \forall x F$

   $\exists x \exists y F \equiv \exists y \exists x F$

4. Falls x in G nicht frei vorkommt, gilt:

$$(\forall x F \wedge G) \equiv \forall x(F \wedge G)$$

$$(\forall x F \vee G) \equiv \forall x(F \vee G)$$

$$(\exists x F \wedge G) \equiv \exists x(F \wedge G)$$

$$(\exists x F \vee G) \equiv \exists x(F \vee G)$$

Satz Für jede Formel F gibt es eine äquivalente (und bereinigte) Formel G in Pränexform.

Hierbei heißt eine Formel G *pränex* oder in *Pränexform*, falls sie die Bauart hat

$$Q_1 y_1 Q_2 y_2 \ldots Q_n y_n G^*,$$

wobei $Q_i \in \{\exists, \forall\}, n \geq 0$, und die y_i Variablen sind und in G^* kein Quantor vorkommt.

Substitutionen

Sei F eine Formel, x eine Variable und t ein Term. Dann bezeichnet $F[x/t]$ diejenige Formel, die man aus F erhält, indem jedes freie Vorkommen der Variablen x in F durch den Term t ersetzt wird.

$$sub = [x/t_1][y/t_2]$$

Überführungslemma. Sei F eine Formel mit einer freien Variablen x und t ein variablenfreier Term.

$$\mathcal{A} \models F[x/t] \text{ genau dann, wenn } \mathcal{A}[x/t^{\mathcal{A}}] \models F$$

Skolemform

Für jede Formel F in BPF definieren wir ihre *Skolemform(-el)* als das Resultat der (evtl. mehrfachen) Anwendung folgenden Umformungsschrittes (solange, bis dieser nicht mehr anwendbar ist).

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists x_{n+1}\, G \quad \Longrightarrow \quad \forall x_1 \ldots \forall x_n\, G[x_{n+1}/f(x_1, \ldots, x_n)]$$

Hierbei ist f ein bisher nicht in der Formel vorkommendes n-stelliges Funktionssymbol.

Satz: Für jede geschlossene Formel F in BPF gilt: F ist erfüllbar genau dann, wenn die Skolemform von F erfüllbar ist.

Gegeben: eine prädikatenlogische Formel F ohne freie Variablen.

1. Bereinige F durch systematisches Umbenennen der gebundenen Variablen, so daß jeder Quantor sich auf einen anderen Variablennamen bezieht. Es entsteht eine zu F äquivalente Formel F_1.

2. Stelle eine zu F_1 äquivalente Formel F_2 in Pränexform her.

3. Eliminiere die vorkommenden Existenzquantoren durch Übergang zur Skolemform von F_2. Diese Formel sei F_3 und ist dann erfüllbarkeitsäquivalent zu F_2 und damit auch zu F.

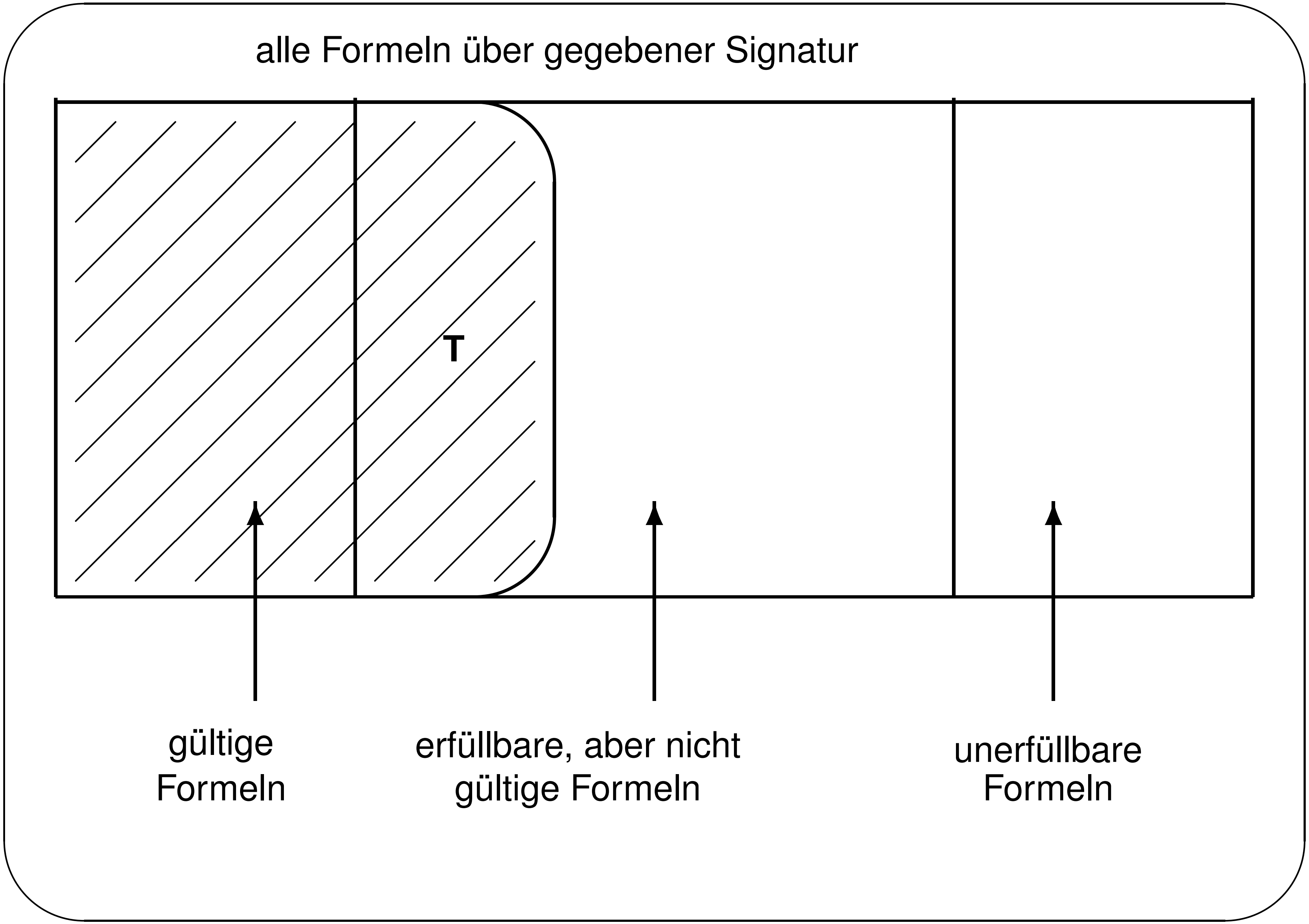
4. Forme die Matrix von F_3 um in KNF (und schreibe diese Formel, bzw. die Matrix dieser Formel dann als Klauselmenge auf).

Mathematische Theorien

Def: Eine *Theorie* ist eine Menge von Formeln **T** die gegenüber Folgerbarkeit abgeschlossen ist.

T ist eine Theorie, wenn für alle $F_1, F_2, \ldots, F_n \in \mathbf{T}$ und alle Formeln G (über der Signatur) gilt: wenn G eine Folgerung von $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ ist, so ist $G \in \mathbf{T}$.

Die Formeln, die Elemente einer Theorie **T** sind, heißen auch *Sätze* der Theorie **T**.


alle Formeln über gegebener Signatur
T
gültige Formeln
erfüllbare, aber nicht gültige Formeln
unerfüllbare Formeln

Es gibt zwei grundsätzlich unterschiedliche Arten, Theorien zu definieren.

Modelltheoretische Methode: man gibt eine Struktur $\mathcal{A}$ vor und nimmt als deren zugeordnete Theorie die Menge aller Formeln, die unter $\mathcal{A}$ gelten.

$$Th(\mathcal{A}) = \{F \mid \mathcal{A} \models F\}.$$

Axiomatische Methode: man ein *Axiomensystem*, (eine Menge von Formeln **M**) vor, und definiert die zu **M** gehörige Theorie als die Menge aller Formeln, die aus **M** folgen.

$$\begin{aligned} \textit{Cons}(\mathbf{M}) \quad = \quad & \{\, G \mid \text{es gibt Formeln } F_1, \ldots, F_n \in \mathbf{M} \\ & \text{mit } \models ((F_1 \wedge \ldots \wedge F_n) \rightarrow G)\} \end{aligned}$$

Gödelsche Unvollständigkeitssatz: die Arithmetik, die Zahlentheorie, ist nicht axiomatisierbar.

Es gibt kein Axiomensystem **M** mit *Cons*$(\mathbf{M})$ = $Th(N, *, +)$.

Herbrand-Theorie

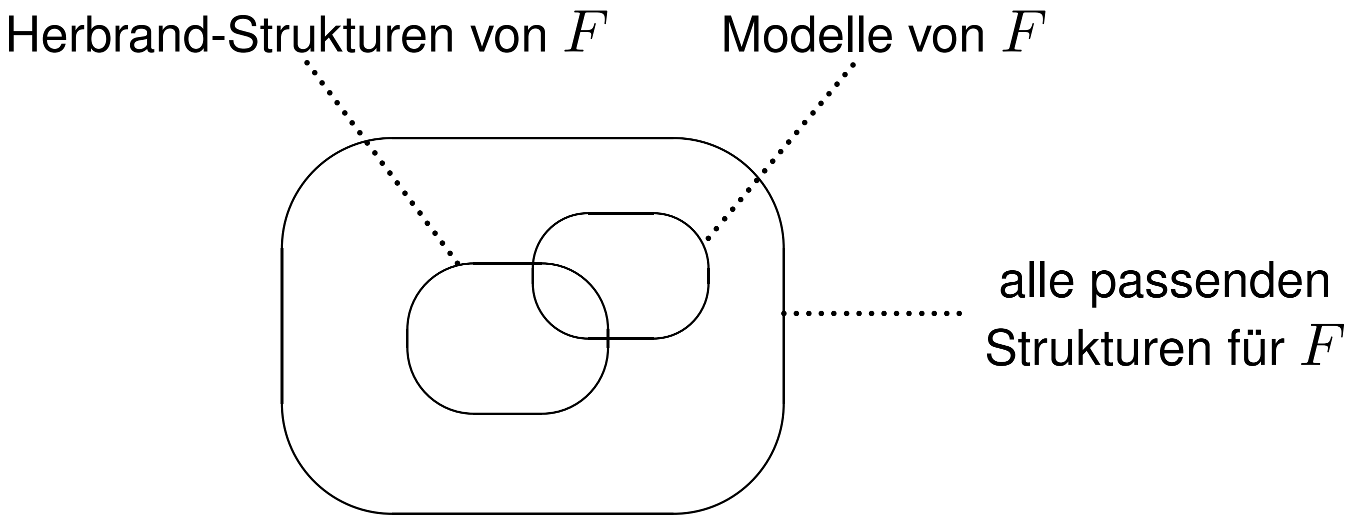
Def: Das *Herbrand-Universum* $D(F)$ einer geschlossenen Formel F in Skolemform ist die Menge aller variablenfreien Terme, die aus den Bestandteilen von F gebildet werden können.

1. Alle in F vorkommenden Konstanten sind in $D(F)$. Falls F keine Konstante enthält, so ist a in $D(F)$.
2. Für jedes in F vorkommende n-stellige Funktionssymbol f und Terme $t_1, t_2, \ldots, t_n$ in $D(F)$ ist der Term $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ in $D(F)$.

Def: Sei F eine Aussage in Skolemform. Dann heißt jede zu F passende Struktur $\mathcal{A}$ eine *Herbrand-Struktur* für F, falls folgendes gilt:

1. Der Grundbereich von $\mathcal{A}$ ist $D(F)$,
2. für jedes in F vorkommende n-stellige Funktionssymbol f und $t_1, t_2, \ldots, t_n \in D(F)$ ist $f^{\mathcal{A}}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$.

Satz: Sei F eine Aussage in Skolemform. Dann ist F genau dann erfüllbar, wenn F ein Herbrand-Modell besitzt.



Satz: (Löwenheim-Skolem) Jede erfüllbare Formel der Prädikatenlogik besitzt bereits ein abzählbares Modell (also eines mit abzählbarer Grundmenge)

Def: Sei $F = \forall y_1 \forall y_2 \cdots \forall y_n F^*$ eine Aussage in Skolemform. Dann ist $E(F)$, die *Herbrand-Expansion* von F, definiert als

$$E(F) = \{F^*[y_1/t_1][y_2/t_2] \cdots [y_n/t_n] \mid t_1, t_2, \ldots, t_n \in D(F)\}$$

Die Formeln in $E(F)$ entstehen also, indem die Terme in $D(F)$ in jeder möglichen Weise für die Variablen in F^* substituiert werden.

Satz: (Gödel-Herbrand-Skolem) Für jede Aussage F in Skolemform gilt: F ist erfüllbar genau dann, wenn die (im allgemeinen unendlich große) Formelmenge $E(F)$ (im aussagenlogischen Sinn) erfüllbar ist.

Satz: (Herbrand) Eine Aussage F in Skolemform ist unerfüllbar genau dann, wenn es eine endliche Teilmenge von $E(F)$ gibt, die (im aussagenlogischen Sinn) unerfüllbar ist.

Algorithmus von Gilmore

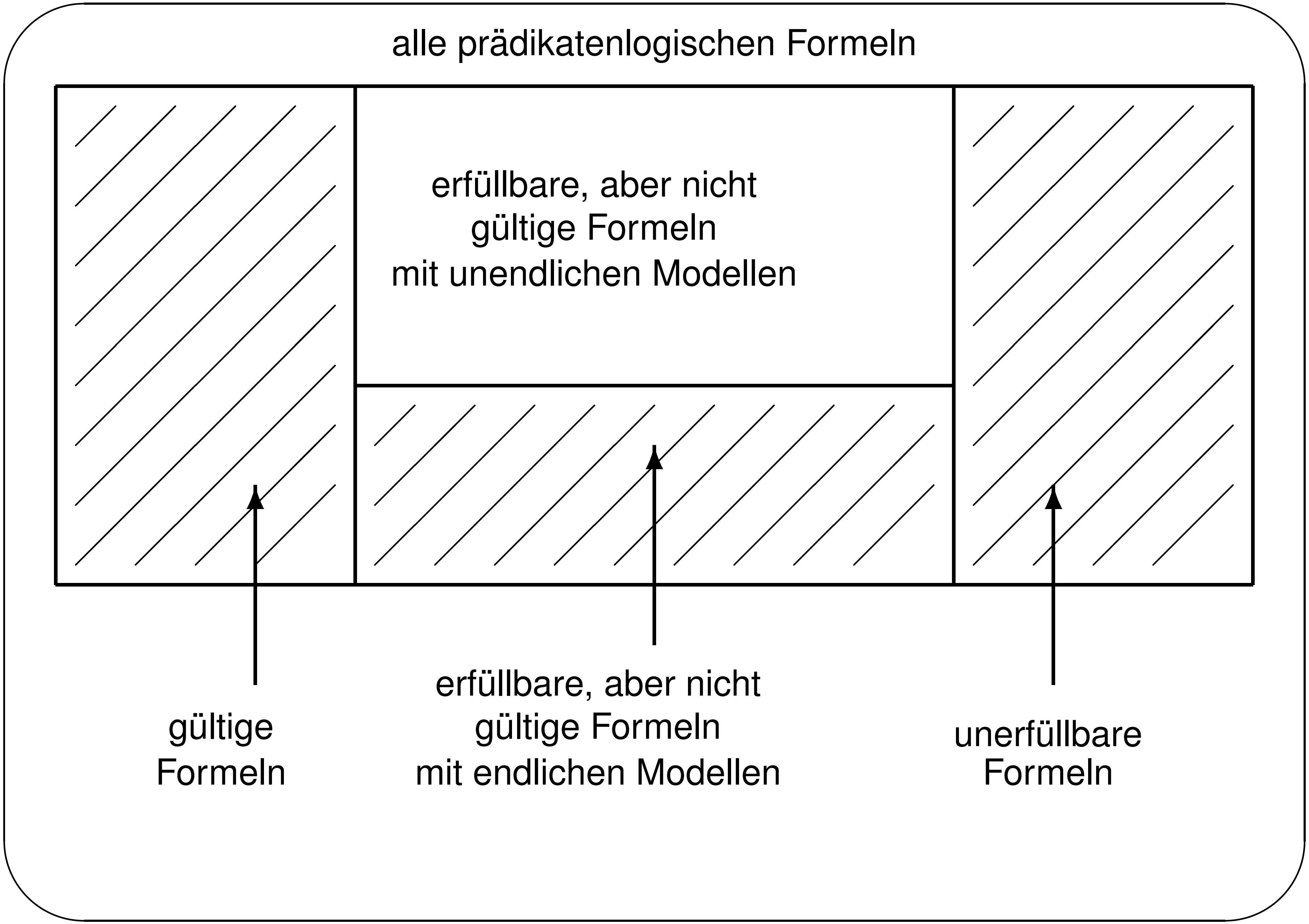
Eingabe: Eine prädikatenlogische Aussage F in Skolemform (Jede prädikatenlogische Formel kann in eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel dieser Art überführt werden).

$n := 0;$

REPEAT $n := n + 1;$

UNTIL $(F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_n)$ ist unerfüllbar; (dies kann mit Mitteln der Aussagenlogik, z.B. Wahrheitstafeln oder Resolution, getestet werden).

Gib “unerfüllbar” aus und stoppe;


alle prädikatenlogischen Formeln
erfüllbare, aber nicht
gültige Formeln
mit unendlichen Modellen
gültige
Formeln
erfüllbare, aber nicht
gültige Formeln
mit endlichen Modellen
unerfüllbare
Formeln

Grundresolutionssatz: Eine Aussage in Skolemform $F = \forall y_1 \forall y_2 \ldots \forall y_k F^*$ mit der Matrix F^* in KNF ist unerfüllbar genau dann, wenn es eine Folge von Klauseln $K_1, K_2, \ldots, K_n$ gibt mit der Eigenschaft:

> K_n ist die leere Klausel und für $i = 1, \ldots, n$ gilt:
>
> > entweder ist K_i eine Grundinstanz einer Klausel $K \in F^*$,
> >
> > > d.h. K_i hat die Form K_i = $K[y_1/t_1] \cdots [y_k/t_k]$ mit $t_1, t_2, \ldots, t_k \in D(F)$,
> >
> > oder K_i ist (aussagenlogischer) Resolvent zweier Klauseln
> >
> > > K_a und K_b mit $a, b < i$.

Def: Eine Substitution sub (also eine Ersetzung von evtl. mehreren Variablen durch Terme) ist ein *Unifikator* einer (endlichen) Menge von Literalen $\mathbf{L} = \{L_1, L_2, \ldots, L_k\}$, falls $L_1 sub = L_2 sub = \ldots = L_k sub$. D.h., durch Anwenden der Substitution sub auf jedes Literal in **L** entsteht ein und dasselbe Literal.

Wir schreiben für diesen Sachverhalt auch $|\mathbf{L}sub| = 1$, und sagen **L** ist *unifizierbar*.

Def: Ein Unifikator sub einer Literalmenge **L** heißt *allgemeinster Unifikator* von **L**, falls für jeden Unifikator sub' von **L** gilt, dass es eine Substitution s gibt mit sub'=$sub\ s$.

Unifikationssatz: (Robinson) Jede unifizierbare Menge von Literalen besitzt einen allgemeinsten Unifikator.

Unifikationsalgorithmus

Eingabe: eine nicht-leere Literalmenge $\mathbf{L}$.

$sub := [\,]$; (dies ist die leere Substitution)

WHILE $|\mathbf{L}sub| > 1$ DO

Durchsuche die Literale in $\mathbf{L}sub$ von links nach rechts, bis die erste Position gefunden ist, wo sich mindestens zwei Literale in den vorkommenden Zeichen unterscheiden;

IF keines der beiden Zeichen ist eine Variable THEN

stoppe mit der Ausgabe "nicht unifizierbar"

ELSE

Sei x die Variable und t sei der im anderen Literal beginnende Term (dies kann auch eine Variable sein);

IF x kommt in t vor THEN

    stoppe mit der Ausgabe “nicht unifizierbar”

  ELSE $sub := sub[x/t]$;

      (dies bedeutet die Hintereinanderausführung von sub und $[x/t]$)

END;

END;

END;

Gib sub als allgemeinsten Unifikator von **L** aus;

Seien K_1, K_2 und R prädikatenlogische Klauseln. Dann ist R ein *prädikatenlogischer Resolvent* von K_1 und K_2, falls folgendes gilt:

1. Es gibt gewisse Substitutionen s_1 und s_2, die Variablenumbenennungen sind, so dass $K_1 s_1$ und $K_2 s_2$ keine gemeinsamen Variablen enthalten.
2. Es gibt eine Menge von Literalen $L_1, \ldots, L_m \in K_1 s_1$ $(m \geq 1)$ und $L'_1, \ldots, L'_n \in K_2 s_2$ $(n \geq 1)$, so dass $\mathbf{L} = \{\overline{L_1}, \overline{L_2}, \ldots, \overline{L_m}, L'_1, L'_2, \ldots, L'_n\}$ unifizierbar ist. Es sei sub allgemeinster Unifikator von **L**.
3. R hat die Form

$$R = ((K_1 s_1 - \{L_1, \ldots, L_m\}) \cup (K_2 s_2 - \{L'_1, \ldots, L'_n\}))sub \; .$$

Lifting-Lemma Seien K_1, K_2 zwei prädikatenlogische Klauseln und K'_1, K'_2 seien beliebige Grundinstanzen hiervon, die resolvierbar sind (im aussagenlogischen Sinn), so daß R' ein Resolvent von K'_1, K'_2 ist. Dann gibt es einen prädikatenlogischen Resolventen R von K_1 und K_2, so daß R' eine Grundinstanz von R ist.

Resolutionssatz (der Prädikatenlogik) Sei F eine Aussage in Skolemform mit der Matrix F^* in KNF. Dann gilt: F ist unerfüllbar genau dann, wenn eine Deduktion der leeren Klausel aus den Klauseln in F^* existiert (wobei die Resolutionsschritte im prädikatenlogischen Sinne zu verstehen sind).