Berechenbarkeit & Komplexität
SS 2016

Universität Ulm
Schöning/Krüger

Übungsblatt 3 — 24. Mai 2016

Abgabe bis Dienstag, 31. Mai 2016, 14:00 Uhr

Aufgabe 3.1: (8 Pkt.)

Sie haben in der Vorlesung gelernt, dass die Kodierungsfunktion $c : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ LOOP-berechenbar ist. Hier sollen nun konkrete LOOP-Programme angegeben werden, welche die Kodierung beziehungsweise die Dekodierung berechnen. Zeigen Sie:

a) Die Funktion $c : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit
$$c(x, y) = \binom{x+y+1}{2} + x$$
ist LOOP-berechenbar.

b) Die Umkehrfunktionen $e, f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $e(c(x, y)) = x$ und $f(c(x, y)) = y$ sind LOOP-berechenbar.

Aufgabe 3.2: (6 Pkt.)

Zeigen Sie ohne Angabe eines LOOP-Programmes, dass folgende Prädikate primitiv rekursiv sind. *Hinweis:* Sie können die primitiv rekursiven Funktionen der Vorlesung/des Skriptes verwenden.

(a) $\alpha(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

(b) $\mathrm{eq}(n, m) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = m \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

(c) $\leq (n, m) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \leq m \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

(d) P und Q seien primitiv rekursive Prädikate. Dann ist auch $P \wedge Q$, $P \vee Q$ und $\neg P$ primitiv rekursiv.

(e) $\mathrm{prim}(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ eine Primzahl ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

(f) $\mathrm{teilt}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \mid y, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Aufgabe 3.3: (2 Pkt.)

Ist die folgende Funktion LOOP-berechenbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } a(x, y) \geq 2^{100}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 3.4: (9 Pkt.)

Zeigen Sie ohne Angabe eines `LOOP`-Programmes, dass folgende Funktionen primitiv rekursiv sind.
Hinweis: Sie können die primitiv rekursiven Funktionen der Vorlesung/des Skriptes verwenden.

(a) $\mathrm{abs}(n, m) = |n - m|$

(b) $\exp(n, m) = n^m$

(c) $\max(n, m) = \max\{n, m\} \quad$ mit $n \neq m$

(d) $\mathrm{diff}(n, m) = n$ DIV $m \quad$ mit $m > 0$

(e) $\mathrm{mod}(n, m) = n$ MOD $m \quad$ mit $m > 0$

(f) $\mathrm{fac}(n) = n!$

(g) $h(n, m) = F_n(m)$, wobei $F_0(m) = 2^m$, $F_{k+1}(m) = 2^{F_k(m)}$
Hinweis: Benutzen Sie Teilaufgabe (b).

(h) $f(n) = \lfloor \log_2(n + 1) \rfloor$

(i) $\mathrm{nf}(p, n) = \begin{cases} x & \text{falls die Faktorisierung von } n \text{ genau } x \text{ mal die Primzahl } p \text{ enthält,} \\ 0 & \text{falls } p \text{ keine Primzahl.} \end{cases}$