

Poseminar Algorithmen: Delaunay Triangulation

Matthias Lenga

Universität Ulm
Institut für theoretische Informatik
89069 Ulm, Germany
Matthias.Lenga@uni-ulm.de

Abstract. Delaunay-Triangulationen sind ein Verfahren, um aus einer Punktmenge ein Dreiecksnetz zu erstellen.

Sie finden vielfältige Anwendungsgebiete in den unterschiedlichsten Bereichen der Naturwissenschaften. In dieser Arbeit soll ein Verfahren zur Berechnung der Delaunay-Triangulation einer Punktmenge im \mathbb{R}^2 vorgestellt werden.

Der Text ist in sechs Abschnitte unterteilt, welche aufeinander aufbauen. Im ersten Abschnitt werden einige Grundlagen eingeführt und die Triangulationen von einfachen Polygonen untersucht. In Abschnitt zwei werden die bereits vorhandenen Resultate auf einen etwas allgemeineren Fall (die Triangulation von Punktmengen) übertragen. Diese werden eine wichtige Rolle bei der Entwicklung des Algorithmus für die Berechnung der Delaunay Triangulation spielen. Anschließend werden Voronoi-Diagramme definiert und untersucht. Diese stellen eine duale Struktur zur der Delaunay Triangulation dar. Von den Eigenschaften der Voronoi-Diagramme können wir einiges über Delaunay Triangulation ableiten, welche in den Abschnitten vier und fünf gründlich untersucht werden. Im letzten Abschnitt wird der Leser viele offene Fragen und Denkanstöße finden.

1 Grundlagen und die Triangulation von Polygonen

In diesem Abschnitt werden zunächst einige Definitionen eingeführt und grundlegende Sätze bewiesen, um dem Leser den Einstieg in das präsentierte Themengebiet zu vereinfachen. Wir wollen zunächst einige geometrische Grundlagen erläutern und unter anderem klären, was Polygonzüge, Polygone und Triangulationen sind.

Definition 1 (Strecke, Polygonzug). *Seien x und y zwei Punkte im \mathbb{R}^2 . Die Verbindungsstrecke zwischen diesen beiden Punkten wird durch folgende abgeschlossene Menge dargestellt:*

$$\sigma(x, y) := \{\alpha \cdot x + (1 - \alpha) \cdot y, \alpha \in [0, 1]\} \subset \mathbb{R}^2$$

Unter einem Polygonzug mit den Ecken $t_0, \dots, t_n \in \mathbb{R}^2$ verstehen wir die Menge

$$Z_{(t_0, \dots, t_n)} := \bigcup_{k=0}^{n-1} \{\sigma(t_{k-1}, t_k)\}$$

Anhand von bestimmten Polygonzügen lassen sich Polygone exakt definieren.

Definition 2 (Polygone). *Unter einem Polygon P versteht man ein Gebiet im \mathbb{R}^2 , welches durch einen geschlossenen Polygonzug beschränkt wird. Der Rand von P lässt sich also folgendermaßen darstellen:*

$$\delta P = Z_{(t_0, \dots, t_n)} \quad \text{wobei } t_n = t_0$$

Die Punkte t_0, \dots, t_{n-1} werden auch als Ecken des Polygons bezeichnet.

Die Mengen $\sigma(t_{i-1}, t_i) \subset \delta P$ nennt man die Kanten von P und alle anderen Verbindungsstrecken $\sigma(t_j, t_k) \not\subset \delta P$ bezeichnet man als Diagonalen. Gehören zu jeder Ecke höchstens zwei Kanten und ergibt der Schnitt zweier Kanten die leere Menge oder einen Eckpunkt, so bezeichnen wir das Polygon als einfach.

Für unsere Zwecke ist es vollkommen ausreichend Triangulationen von einfachen Polygonen zu untersuchen.

Definition 3 (Triangulation einfacher Polygone). *Sei P ein einfaches Polygon. Unter einer Triangulation $T(P)$ von P verstehen wir die Zerlegung von P in Dreiecke durch eine maximale Anzahl von Diagonalen welche sich nur in einem Eckpunkt oder überhaupt nicht schneiden.*

Man sieht, dass die Triangulationen keinesfalls eindeutig sind. Intuitiv ist klar, dass jedes einfache Polygon trianguliert werden kann. Es gilt folgender Sachverhalt:

Theorem 1. *Für jedes einfache Polygon mit $n \geq 3$ Ecken existiert eine Triangulation welche aus genau $n-2$ Dreiecken besteht.*

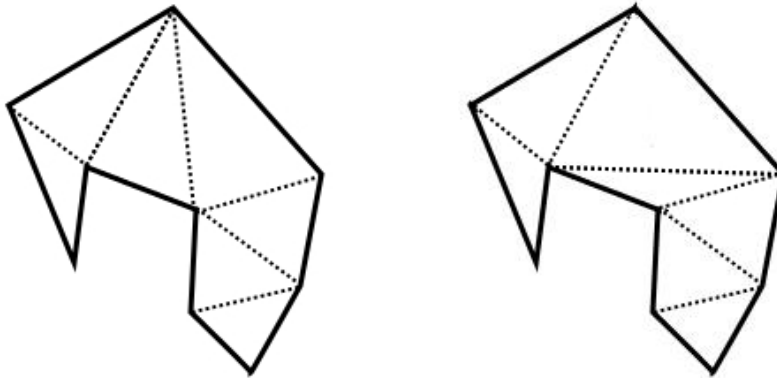


Fig. 1. Triangulationen eines einfachen Polygons

Proof. Die Induktionsverankerung für $n=3$ ist offensichtlich erfüllt. Angenommen die Behauptung gilt für alle $n < m$. Sei nun P ein Polygon mit m Ecken. Durch eine Diagonale D (deren Existenz leicht bewiesen werden kann) kann P in zwei Teilpolygone P_1 mit m_1 Ecken und P_2 mit m_2 Ecken zerlegt werden. Da mindestens eine Ecke aus P_1 nicht in P_2 enthalten ist, folgt $m_1, m_2 < m$. Nach Voraussetzung können P_1 und P_2 trianguliert werden und somit auch P . Für die Anzahl der Dreiecke in P kann man sich Folgendes überlegen: Die beiden Teilpolygone P_1 und P_2 teilen sich ausschließlich die Kante D . Daher liegen nur die zwei zugehörigen Ecken in dem Schnitt der beiden Eckenmengen. Es gilt somit $m_1 + m_2 = m + 2$. Nach Induktionsvoraussetzung besteht P_1 aus $m_1 - 2$ und P_2 aus $m_2 - 2$ Dreiecken. Also besteht P aus $m_1 - 2 + m_2 - 2 = m + 2 - 4 = m - 2$ Dreiecken. Das entspricht der Behauptung. \square

Auf einen Algorithmus zur Triangulation von Polygonen wird an dieser Stelle verzichtet. In [CG, Seite 57ff] findet man z.B. einen Algorithmus, welcher einfache Polygone in $O(n \log n)$ triangulieren kann. 1991 wurde von Bernard Chazelle, ein Professor für theoretische Informatik in Princeton, ein Algorithmus formuliert welcher diese Aufgabe sogar in linearer Zeit bewältigt. Für uns ist vorerst nur wichtig, dass einfache Polygone triangulierbar sind. Ein Verfahren für beliebige Punktemenge im \mathbb{R}^2 wird in dem Abschnitt über die Delaunay Triangulation vorgestellt. Dieses ist ohne Probleme auf Polygone übertragbar.

2 Triangulation von Punktemengen

Im Rahmen der Delaunay Triangulation werden wir uns nicht nur mit einfachen Polygonen, sondern mit Punktemengen im \mathbb{R}^2 beschäftigen. Fortan bezeichne $CH(M)$ die konvexe Hülle einer Menge M . Wir nehmen stets an, dass sich die betrachteten Punkte in allgemeiner Lage befinden.

Definition 4 (Triangulation einer Punktmenge). Sei $S = \{p_0, \dots, p_n\}$, $p_i \in \mathbb{R}^2$, $n \geq 2$. Eine Triangulation $T(S)$ ist eine maximale planare Unterteilung¹ der konvexen Hülle von S .

Nach dieser Definition ist die Existenz einer Triangulation von S gesichert, da man für jede solcher Punktmenge im \mathbb{R}^2 die konvexe Hülle konstruieren kann. Es gilt dann $CH(S) \neq \emptyset$. Eine solche Triangulation besteht auch immer aus Dreiecken, da $CH(S)$ problemlos in einfache Polygone zerlegt werden kann, die nach Theorem 1 triangulierbar sind. Jede Triangulation ist offensichtlich ein

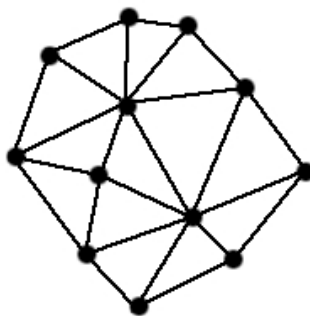


Fig. 2. Triangulationen einer Punktmenge

zusammenhängender, planarer Graph und somit gilt folgende Version des Eulerschen Polyedersatzes.

Theorem 2 (Eulerscher Polyedersatz). Sei $G=(V,E)$ ein zusammenhängender planarer Graph, dann gilt:

$$|V| + \text{Gebietszahl} - |E| = 2$$

Proof. Dieser Satz soll mit struktureller Induktion über den Aufbau von zusammenhängenden planaren Graphen bewiesen werden. G bezeichne die Anzahl der Gebiete. Der einfachste planare Graph besteht aus einem Knoten. Es gibt somit nur eine Fläche (die unbeschränkte Außenfläche) und keine Kanten. Also gilt $|V| + \text{Gebietszahl} - |E| = 1 + 1 + 0 = 2$.

Aus diesem einfachen Szenario können wir durch folgenden Operationen jeden beliebigen zusammenhängenden planaren Graphen konstruieren.

i) Wir fügen dem Graphen G eine neue Ecke hinzu. Da G nach Voraussetzung zusammenhängend ist, benötigen wir auch eine weitere Kante. Die Anzahl der Gebiete bleibt offensichtlich unverändert, da unter Voraussetzung der Planarität

¹ d.h. die Unterteilung ist maximal bezüglich ihrer Kantenzahl. Es kann also keine weitere Kante hinzugefügt werden, ohne die Planarität zu zerstören.

durch diese Operation kein neues Gebiet entstehen kann. Somit folgt:

$$(|V| + 1) + (\text{Gebietszahl} + 1) - |E| = \underbrace{|V| + \text{Gebietszahl} - |E|}_{\text{nach Vor. für G erfüllt}} = 2$$

ii) Wir fügen zwischen zwei bereits vorhandenen Knoten, unter Berücksichtigung der Planarität, eine neue Kante ein. Dadurch wird ein altes Gebiet in zwei Teilgebiete aufgespalten. Die Anzahl der Ecken bleibt unverändert. Insgesamt gilt dann:

$$|V| + (\text{Gebietszahl} + 1) - (|E| + 1) = \underbrace{|V| + \text{Gebietszahl} - |E|}_{\text{nach Vor. für G erfüllt}} = 2$$

Die Gültigkeit des Satzes wird nicht durch i) oder ii) verletzt. Die Behauptung gilt somit für jeden beliebigen zusammenhängenden planaren Graphen. \square

Den Eulerschen Polyedersatz kann man z.B. an Figur 2 überprüfen. Die Triangulation enthält 12 Ecken, 14 Gebiete (13 Dreiecke und die unbeschränkte Außenfläche) sowie 24 Kanten. $12 + 14 - 24 = 2$. In dem ersten Abschnitt wurde bereits erwähnt, dass Triangulationen nicht eindeutig sind. Allerdings werden wir beweisen, dass die Anzahl an Kanten und Dreiecken in allen Triangulationen einer Punktmenge S gleich ist. Wie der nächste Satz zeigen wird, hängen diese zwei Werte von der Anzahl der Punkte auf dem Rand der konvexen Hülle ab.

Theorem 3. *Sei S eine Menge mit n Punkten aus dem \mathbb{R}^2 . Sei k die Anzahl der Punkte welche auf dem Rand von $CH(S)$ liegen. Jede Triangulation $T(S)$ besitzt dann $2n - 2 - k$ Dreiecke und $3n - 3 - k$ Kanten.*

Proof. Sei n_{Δ} die Anzahl der Dreiecke in $T(S)$. Es gibt eine unbeschränkte Fläche, nämlich das Komplement der konvexen Hülle von S . Die Gesamtzahl der Flächen ist somit:

$$n_{\text{Flächen}} := n_{\Delta} + 1$$

Jedes Dreieck besitzt 3 Kanten. Die unbeschränkte Fläche besitzt k Kanten, da k Knoten auf $\delta CH(S)$ liegen. Jede Kante hat 2 angrenzende Flächen. Somit erhalten wir als Kantenzahl für $T(S)$

$$n_{\text{Kanten}} := \frac{3n_{\Delta} + k}{2}$$

Mit dem Eulerschen Polyedersatz folgt

$$2 = n + n_{\text{Flächen}} - n_{\text{Kanten}} = n + n_{\Delta} + 1 - \frac{3n_{\Delta} + k}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4 = 2n + 2n_{\Delta} + 2 - 3n_{\Delta} - k$$

$$\Leftrightarrow n_{\Delta} = 2n - 2 - k$$

und somit gilt

$$n_{\text{Kanten}} = \frac{3n_{\Delta} + k}{2} = \frac{3(2n - 2 - k) + k}{2} = 3n - 3 - k$$

Dieses Resultat entspricht der Behauptung. \square

3 Voronoi Diagramme

In diesem Abschnitt soll eine geometrische Struktur vorgestellt werden, welche eng mit der Delaunay Triangulation verwandt ist. Es geht um folgende Fragestellung:

Gegeben sei eine Menge $S = \{s_0, \dots, s_n\}$ mit $s_i \in \mathbb{R}^2$. Diese Punkte bezeichnen wir fortan als Zentren. Wie kann man die Ebene in Polygone P_0, \dots, P_n zerlegen, so dass sich in jedem Polygon P_i genau ein Zentrum s_i befindet und alle Punkte im Inneren von P_i näher an s_i liegen als an jedem anderen Zentrum? Diese Polygone bezeichnen wir als Voronoi-Zellen. Mehr dazu später - fangen wir nun mit einigen Grundlagen an.

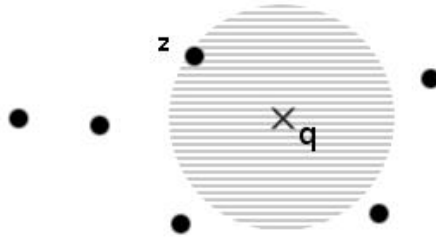


Fig. 3. z ist das Zentrum welches den geringsten Abstand zu q hat

Den Abstand zwischen zwei Punkten $x, y \in \mathbb{R}^2$ wollen wir stets durch die Euklidische Metrik definieren.

$$d(x, y) = \|x - y\|_2 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

Definition 5 (Bisektor, Halbebene, Voronoi-Zelle). Seien p und q zwei Punkte im \mathbb{R}^2 . Die Menge der Punkte, deren Abstand zu p kleiner als zu q ist, kann man durch folgende offene Halbebene darstellen:

$$H(p, q) := \{x \in \mathbb{R}^2 : d(p, x) < d(q, x)\}$$

Die Menge der Punkte mit gleichem Abstand zu q und p nennem wir den Bisektor der beiden Punkte. Dieser begrenzt offensichtlich die Halbebenen $H(p, q)$ und $H(q, p)$.

$$B(p, q) := \{x \in \mathbb{R}^2 : d(p, x) = d(q, x)\}$$

Geben wir nun eine Menge $S = \{s_0, \dots, s_n\}$ mit $s_i \in \mathbb{R}^2$ vor, so ist die Voronoi-Zelle eines Punktes $p \in S$ bezüglich S folgendermaßen definiert:

$$VZ(p, S) := \bigcap_{q \in S \setminus \{p\}} H(p, q)$$

Stellt S eine Menge von Zentren dar, so ist anschaulich klar, dass $VZ(p, S)$ die weiter oben geforderten Eigenschaften hat, d.h. $VZ(p, S)$ enthält die Punkte deren naheliegendstes Zentrum p ist.

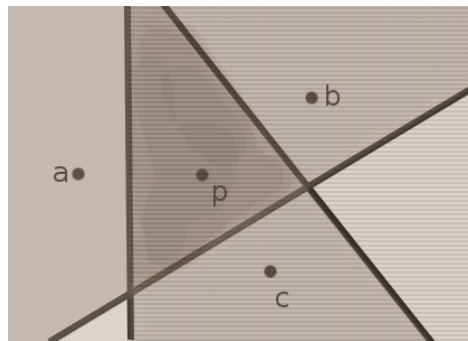


Fig. 4. Der Schnitt der Halbebenen $H(p, a)$, $H(p, b)$ und $H(p, c)$. Die dicken Linien entsprechen den Bisektoren. Die dunkle, dreiecksförmige Fläche entspricht $VZ(p, \{a, b, c, p\})$.

Voronoi-Zellen sind als endlicher Durchschnitt der offenen, konvexen Halbebenen selber stets offen und konvex. Vereinigen wir nun alle Voronoi-Zellen der Punkte aus S und bilden das Komplement, so erhalten wir eine interessante Menge.

Definition 6. Das Voronoi-Diagramm einer Punktemenge S ist wie folgt definiert:

$$V(S) := \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{p \in S} VZ(p, S) = \bigcap_{p \in S} VZ(p, S)^c$$

Diese Menge enthält all die Segmente aller Bisektoren, welche zu keiner der Halbebenen gehören.

Haben wir nun einen beliebigen Punkt x in der Ebene gegeben, so ist es interessant zu wissen, ob dieser Punkt innerhalb einer Voronoi-Zelle liegt, sich auf einer Kante des Voronoidiagramms befindet oder sogar ein Knotenpunkt ist.

Theorem 4. Sei $S = \{s_0, \dots, s_n\}$ eine Menge von Punkten aus dem \mathbb{R}^2 und sei $p \in \mathbb{R}^2 \setminus S$. $K_S(p)$ bezeichne den größten, offenen Kreis mit dem Mittelpunkt p , welcher keine Punkte aus S enthält. Dann gilt:

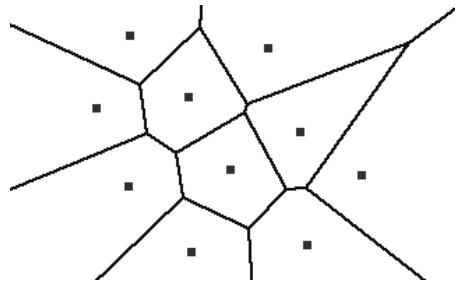


Fig. 5. Das Voronoi-Diagramm eine Punktmenge

- 1) Der Abschluss von $K_S(p)$ enthält genau ein $s_i \in S \Leftrightarrow p \in VZ(s_i, S)$.
- 2) Der Abschluss von $K_S(p)$ enthält genau zwei $s_i, s_j \in S \Leftrightarrow p \in B(s_i, s_j)$
d.h. p liegt auf der Kante zwischen s_i und s_j .
- 3) Der Abschluss von $K_S(p)$ enthält ≥ 3 Punkte aus $S \Leftrightarrow p$ ist Knoten des Voronoi-Diagramms. Die Voronoizellen dieser Punkte grenzen alle an p an.

Proof. Eigenschaft 1 findet man in [EB, S.295] und den Beweis von 2 und 3 kann man [CG, S.150] entnehmen. Die Situation kann man sich gut an Schaubild Nr.6 klar machen.

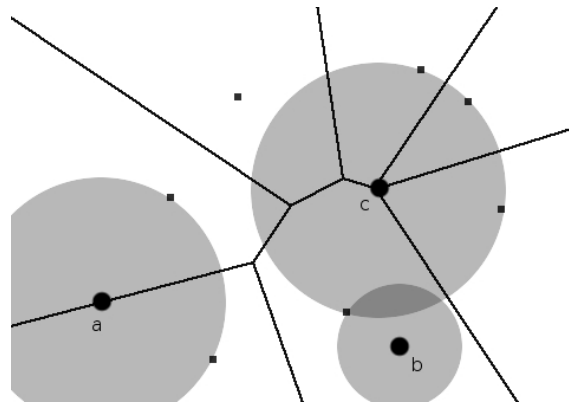


Fig. 6. Der Punkt a liegt auf einer Kante, der Punkt b liegt innerhalb einer Voronoi-Zelle, der Punkt c ist ein Knoten des Voronoi-Diagramms

Es gibt eine Vielzahl von Algorithmen zur Berechnung von Voronoi-Diagrammen. In [KL] werden verschiedene $O(n \log(n))$ Algorithmen präsentiert. Wir wollen

keinen Algorithmus zur direkten Berechnung von $V(S)$ angeben, sondern einen indirekten Weg wählen. In einem späteren Abschnitt wird gezeigt, dass man Voronoi-Diagramme in linearer Zeit aus Delaunay-Triangulationen gewinnen kann. Voronoi-Diagramme sind nicht nur ein theoretisches Konstrukt, sondern finden Anwendung in vielen aktuellen Forschungsgebieten. Hier einige Beispiele:

IBM verwendet Voronoi-Diagramme zur Analyse von IC Designs mit hohen Integrationsdichten (siehe [IBM]), Routing in Wireless Netzwerken und Topologie-Analysen, Ermittlung von kollisionsfreien Wegen für Roboter.

4 Delaunay Triangulationen

Mit der Vorarbeit aus den Abschnitten 1 bis 3 können wir uns nun den Delaunay Triangulationen zuwenden. In diesem Abschnitt ist $S = \{s_0, \dots, s_n\}$ eine Punktmenge im \mathbb{R}^2 mit der Eigenschaft, dass nie vier Punkte kozyklisch sind². Zunächst wollen wir den dualen Graphen G von $V(S)$ betrachten. Da $V(S)$ pla-

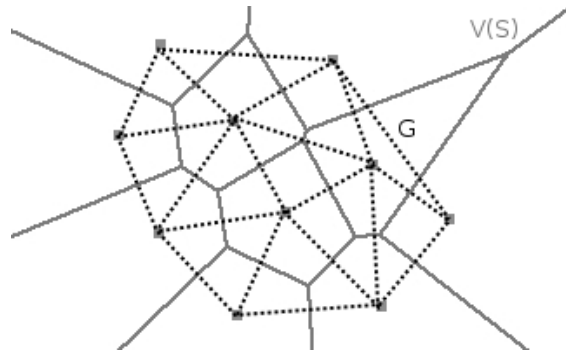


Fig. 7. Der gestrichelte Graph ist G , der graue Graph ist $V(S)$

nar und zusammenhängend ist, gilt das Gleiche für G . Unter der Annahme, dass keine vier Punkte aus S auf einem Kreis liegen, sind alle beschränkten Flächen in G Dreiecke. G ist somit eine Triangulation im Sinne von Definition 4 und wird *Delaunay Triangulation* von S genannt - in Zeichen: $D(S)$. Theorem 4 kann nun wie folgt umformuliert werden:

Theorem 5. Sei $S = \{s_0, \dots, s_n\}$ eine Menge von Punkten aus dem \mathbb{R}^2 .

- 1) s_{i1}, s_{i2} und $s_{i3} \in S$ sind Eckpunkte eines Dreiecks in $D(S)$ g.d.w. der abgeschlossene Kreis K mit den Punkten s_{i1}, s_{i2}, s_{i3} auf dem Rand keine weiteren Punkte von P in seinem Inneren enthält.

² Man bezeichnet Punkte als kozyklisch, falls sie auf einem Kreis liegen

- 2) Für zwei Punkte $s_{i1}, s_{i2} \in S$ ist $\overline{s_{i1} s_{i2}}$ eine Kante von $D(S)$ g.d.w. ein abgeschlossener Kreis K mit den Punkten s_{i1}, s_{i2} auf dem Rand existiert, der keine anderen Punkte von P enthält.

Wir können Delaunay Triangulationen also folgendermaßen charakterisieren: $D(S)$ zerlegt die konvexe Hülle einer Punktmenge S in Dreiecke. Diese haben alle die Eigenschaft, dass ihre Umkreise nur die dem Dreieck zugehörigen Eckpunkte aus S enthalten. Falls sich die Punkte von S in allgemeiner Lage befinden, so ist diese Triangulation sogar eindeutig. Die Umkreismittelpunkte entsprechen den Knoten des dualen Voronoi-Diagrammes (siehe Theorem 4). Delaunay Tri-

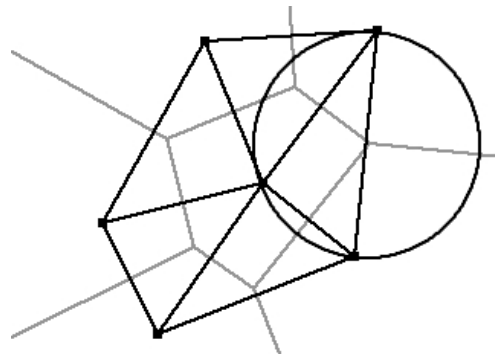


Fig. 8. Die Delaunay Triangulation einer Punktmenge. Im Hintergrund sieht man in Grau das duale Voronoi Diagramm. Um Theorem 5 zu veranschaulichen wurde der Umkreis eines Dreiecks eingezeichnet.

angulationen haben noch eine weitere sehr wichtige Eigenschaft. Sortieren wir die Innenwinkel aller Dreiecke aufsteigend nach ihrer Größe, so bezeichnen wir das Tupel $W_{D(S)} := (w_1, w_2, \dots, w_{3m})$ als *Winkelvektor*. Es gilt also $w_i \leq w_j$ für $i \leq j$. Betrachten wir nun eine beliebige andere Triangulation der gleichen Punktmenge, so gilt stets, dass ihr Winkelvektor lexikographisch kleiner³ als $W_{D(S)}$ ist, d.h. $W_{D(S)}$ maximiert den kleinsten Innenwinkel über alle Dreiecke.

Um diesen Sachverhalt genauer zu untersuchen, benötigen wir noch einige Hilfsmittel. Zunächst wollen wir die Innenwinkel beliebiger Triangulationen von Punktmenge betrachten.

Theorem 6. Ist \overline{ab} Sekante eines Kreises K und sind x und y Punkte auf K sowie i ein Punkt innerhalb und h ein Punkt außerhalb von K , so gilt:

$$\sphericalangle(aib) > \sphericalangle(axb) = \sphericalangle(ayb) > \sphericalangle(ahb)$$

³ Eine Folge $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ist lexikographisch kleiner als eine Folge $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$ wenn beide Folgen vor einem bestimmten Index k gleich sind aber $s_k < t_k$.

Proof. Die Gleichheit $\sphericalangle(axb) = \sphericalangle(ayb)$ folgt sofort aus dem Peripheriewinkelsatz. Die anderen beiden Ungleichungen folgen so:

Wähle einen Punkt t auf K , so dass das Dreieck aib komplett in atb liegt. Der Innenwinkel am Punkt t ist spitzer als der Innenwinkel am Punkt i . Wähle einen weiteren Punkt u , so dass das Dreieck aub komplett in ahb liegt. Der Innenwinkel am Punkt h ist spitzer als der Innenwinkel am Punkt u . Mit der Tatsache, dass die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks 180° beträgt, folgt die Behauptung. \square

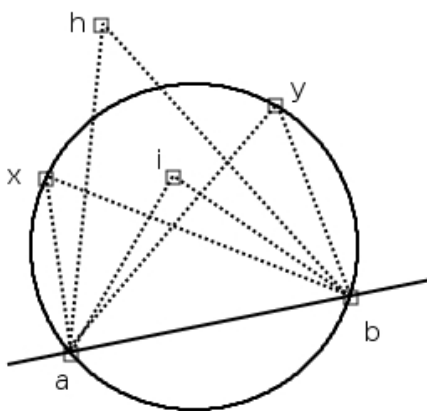


Fig. 9. Theorem 6: Beziehung zwischen Punktelage und Winkel

In Abschnitt 1 wurde bereits erwähnt, dass Triangulationen nicht eindeutig sind. Somit können verschiedene Triangulationen der gleichen Punktmenge unterschiedliche Winkelvektoren haben. Betrachten wir z.B. *Figur 10*:

Der Winkelvektor der ersten Triangulation ist $W_{T_1(S)} = (21, 24.42, 33.74, 36.57, 119.01, 125.26)$. Der Umkreis eines Dreiecks enthält einen anderen Punkt aus S und somit ist $T_1(S)$ nach Theorem 5 keine Delaunay-Triangulation. Betrachten wir nun eine Triangulation $T_2(S)$ welche aus $T_1(S)$ durch einen sogenannten "Kanten Flip" entsteht. Diese Triangulation ist nach Theorem 5 eine Delaunay-Triangulation. Der Winkelvektor von $T_2(S)$ ist $W_{T_2(S)} = (39.56, 43.08, 57.56, 58.17, 79.35, 82.18)$. Also ist $T_1(S)$ lexikographisch kleiner als $T_2(S)$.

Definition 7 (Illegale Kante, legale Triangulation). Sei e eine Kante von $T(S)$. Wir bezeichnen e als illegal, falls durch einen Flip der kleinste vorkommende Innenwinkel lokal vergrößert werden kann. Eine Triangulation, welche keine illegalen Kanten besitzt, heißt legal.

Es stellt sich nun die Frage, ob es eine Möglichkeit gibt, Kanten auf Illegalität zu testen ohne alle Winkel zu berechnen. Aus Theorem 6 folgt:

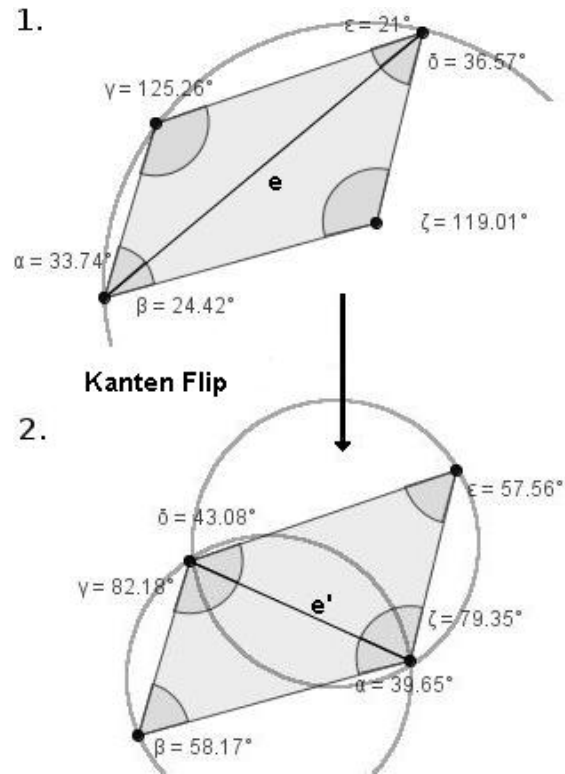


Fig. 10. Umkreistest, Flip und der kleinste Innenwinkel wird vergrößert

Lemma 1 (Umkreis-Test). *Betrachten wir zwei angrenzende Dreiecke acb und adc aus einer Triangulation $T(S)$. Die Kante \overline{ab} ist illegal g.d.w. die Umkreise der Dreiecke nicht leer sind, d.h. in dem Umkreis befindet sich mindestens ein Punkt aus S welcher kein Eckpunkt des Dreiecks ist. Figur 10 veranschaulicht diesen Sachverhalt.*

Nach Theorem 5 sind alle Umkreise der Dreiecke in einer Delaunay-Triangulation leer. Mit Lemma 1 folgt direkt:

Theorem 7. *Eine Triangulation einer Menge $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ ist legal g.d.w. sie eine Delaunay-Triangulation ist.*

Wir möchten nun aus einer beliebigen Triangulation eine Delaunay Triangulation machen. Unser Ansatz ist es, die Kanten nacheinander auf Illegalität zu testen und gegebenenfalls zu flippen, bis keine illegalen Kanten mehr vorhanden sind. Können wir sicherstellen, dass dieses Verfahren terminiert? Für eine Menge S mit n Ecken gibt es nur endlich viele Triangulationen. Die genaue Anzahl ist die $(n-2)$ -te Catalan-Zahl, siehe [SH, Seite 6]. Mit jedem durchgeführten Flip vergrößert sich lokal der kleinste Winkel. Somit gilt, dass sich der Winkelvektor der Triangulation mit jedem Schritt lexikographisch vergrößert oder unverändert bleibt.

Da ein Kanten-Flip die Winkel der nicht angrenzenden Dreiecke unverändert lässt, folgt mit Theorem 7, dass man nach endlich vielen Schritten eine Delaunay Triangulation erhält.

Somit haben wir ein naives Verfahren gefunden eine Delaunay-Triangulation einer Punktmenge S zu erzeugen, ohne zuvor das Voronoi-Diagramm berechnet zu haben. Dieses Resultat ist aber noch nicht zufriedenstellend.

5 Die Berechnung der Delaunay Triangulation

Nun wollen wir einen Algorithmus zur Berechnung von $D(S)$ im Detail angeben. Zunächst benötigen wir jedoch ein weiteres geometrisches Hilfsmittel.

Theorem 8. *Sei K eine Kreisscheibe und $a \in \delta K$ sowie $b \in \overset{\circ}{K}$. Dann gibt es einen Kreis C mit $a, b \in \delta C$, so dass C außer a nur Punkte aus $\overset{\circ}{K}$ enthält.*

Auf einen Beweis wird an dieser Stelle verzichtet. Figur Nummer 11 veranschaulicht den Sachverhalt. Die Konstruktion von C erfolgt mittels der Strahlensätze. Wir wollen jetzt Schritt für Schritt einen randomisierten, inkrementellen Al-

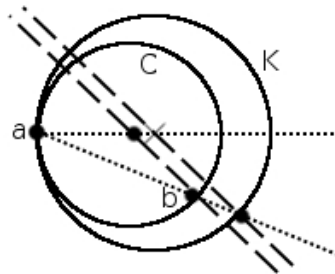


Fig. 11. $K \cap C = \{a\}$

gorithmus entwickeln. Unsere Algorithmus wird auf folgende Weise arbeiten:

INPUT: $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ mit $s_i \in \mathbb{R}^2$ für $i = 1..n$

RETURNS: $D(S)$

Sei z der Punkt aus S mit der kleinsten x -Koordinate und größten y -Koordinate. Suche zwei Punkte $e, f \in \mathbb{R}^2$, so dass alle Punkte aus S in dem Dreieck zef enthalten sind.⁴

$T := D(\{z, e, f\})$ // entspricht dem Dreieck zef

⁴ Diese Hilfskonstruktion stellt sicher, dass sich alle Punkte von S bereits in der konvexen Hülle von T befinden. Dies erleichtert den Einfügeschritt.

```

while  $S \neq \emptyset$  do
  Entnehme  $S$  einen zufällig gewählten Punkt  $k$ .
  Füge  $k$  zu  $T$  hinzu ohne die Struktur einer Delaunay Triangulation zu zerstören.
end while
Entferne  $e$  und  $f$  mitsamt aller inzidenten Kanten.
return  $T$ 

```

Nun soll der Schritt "Füge k zu T hinzu" genauer untersucht werden. Zunächst wollen wir festhalten, dass eine vorher legale Kante nur dann illegal werden kann, wenn sich eines der angrenzenden Dreiecke verändert hat.

Gehen wir davon aus, dass wir die Delaunay Triangulation einer Menge $S' \cup \{e, f\}$ mit $S' \subset S$ bereits berechnet haben. Sei $p \in S \setminus S'$ der Punkt, den wir der Triangulation hinzufügen wollen. Da alle Punkte aus S in dem Dreieck zef enthalten sind liegt p entweder in dem Inneren eines Dreiecks abc oder auf einer Kante ac von $D(S' \cup \{e, f\})$.

Im ersten Fall teilt man das bereits vorhandene Dreieck durch Hinzufügen von Kanten zwischen den drei Eckpunkten und p in 3 kleinere Dreiecke auf (siehe Figur 12 links). Nach Theorem 8 gibt es einen Kreis C mit $a, p \in \delta C$ welcher keine weiteren Punkte von S enthält. Mit Theorem 5 folgt sofort, dass \overline{ap} eine Kante von $D(S' \cup \{e, f, p\})$ ist. Für die Kanten \overline{bp} und \overline{cp} ist die Argumentation analog. Potentiell illegale Kanten sind somit \overline{ab} , \overline{ac} und \overline{bc} . Im zweiten Fall fügt

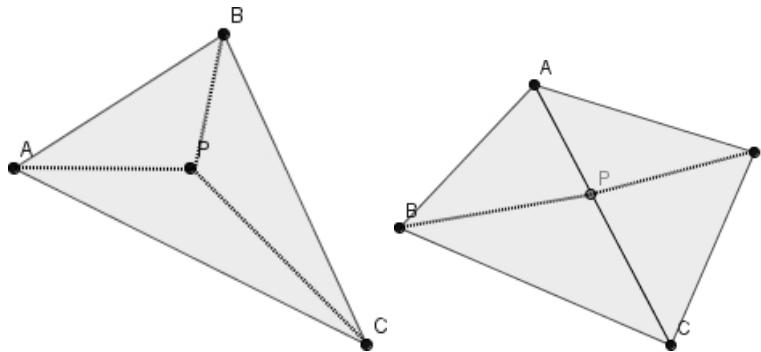


Fig. 12. links Fall 1, rechts Fall 2

man in die zwei angrenzenden Dreiecke abc und adc je eine Kante zwischen p und dem gegenüberliegenden Eckpunkt ein (siehe Figur 12 rechts). p liegt sowohl im Umkreis von abc als auch im Umkreis von adc . Mit Theorem 8 und Theorem 5 folgt somit wieder, dass \overline{dp} , \overline{ap} , \overline{cp} und \overline{bp} Kanten von $D(S' \cup \{e, f, p\})$ sind. Potentiell illegale Kanten sind somit \overline{ab} , \overline{bc} , \overline{cd} und \overline{ad} .

Ausgehend von den potentiell illegalen Kanten werden wir mit dem folgenden Algorithmus die Triangulation wieder legalisieren (Alg. 1). MAKELEGAL bekommt also eine potentiell illegale Kante übergeben und prüft diese auf Legalität (z.B. mit dem Umkreis-Test). Falls der Umkreis-Test fehlschlägt wird die Kante geflippt. Durch den Flip entstehen zwei neue potentiell illegale Kanten für die MAKELEGAL rekursiv gerufen wird. Am Ende von Abschnitt 4 wurde bereits argumentiert, dass ein solches Verfahren terminiert. Insgesamt können wir dann einen Algorithmus zur Berechnung der Delaunay Triangulation angeben (Alg. 2). Auf eine genaue Analyse soll aufgrund des Umfangs der

Algorithm 1 MAKELEGAL(p, \overline{rs})

```

// der Punkt p wurde hinzugefügt
//  $\overline{rs}$  ist die Kante welche auf Legalität überprüft werden soll
// rsq sei das benachbarte Dreieck,  $\overline{rs}$  ist die gemeinsame Kante von prs und qrs
if  $\overline{rs}$  is illegal then
  ersetze  $\overline{rs}$  durch  $\overline{qp}$  // FILP
  MAKELEGAL( $p, \overline{qs}$ ) // diese Kanten sind nun potentiell illegal
  MAKELEGAL( $p, \overline{qr}$ )
end if

```

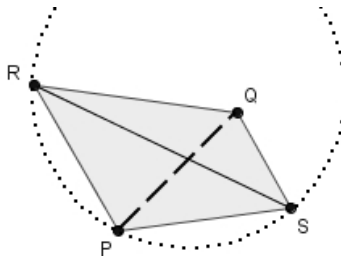


Fig. 13. Algorithmus 1: Die Kante \overline{rs} erfüllt den Umkreistest nicht und ist somit illegal.

Arbeit verzeichnet werden. Auch auf die genaue Implementierung der einzelnen Schritte können wir nicht eingehen, da diese einige andere Verfahren aus der algorithmischen Geometrie voraussetzen. Man sieht, dass diese Arbeit lediglich eine Einführung in das Themengebiet darstellt. Offene Fragen sind nun unter anderem: Wie finde ich effizient die zwei Punkte e und f , so dass S in dem Dreieck zef enthalten ist? Wie finde ich heraus in welchem Dreieck von T der Punkt k liegt? Wie implementiere ich effizient den Umkreistest? Welche Datenstruktur sollte zur Repräsentation einer Triangulation wählen? In dieser Arbeit wurden lediglich Triangulationen im \mathbb{R}^2 betrachtet. Gibt es auch Triangulationen für höherdimensionale Punktemengen? Was passiert, wenn wir andere Abstandsbegriffe (sprich andere Metriken) einführen? Ist es möglich Metriken durch noch

Algorithm 2 DELAUNAYTRIANGULATION(S)

Sei z der Punkt aus S mit der kleinsten x -Koordinate und größten y -Koordinate.
Suche zwei Punkte $e, f \in \mathbb{R}^2$, so dass alle Punkte aus S in dem Dreieck zef enthalten sind.
 $T :=$ Dreieck zef
while $S \neq \emptyset$ **do**
 Entnehme S einen zufällig gewählten Punkt k .
 if k liegt innerhalb eines Dreiecks abc **then**
 // Das entspricht Fall 1
 // Potentiell illegale Kanten: $\overline{ab}, \overline{ac}, \overline{bc}$
 MAKELEGAL(k, \overline{ab})
 MAKELEGAL(k, \overline{ac})
 MAKELEGAL(k, \overline{bc})
 else
 // Das entspricht Fall 2, k liegt auf der Kante ac
 // die angrenzenden Dreiecke sind abc und adc
 // Potentiell illegale Kanten: $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{cd}, \overline{ad}$
 MAKELEGAL(k, \overline{ab})
 MAKELEGAL(k, \overline{bc})
 MAKELEGAL(k, \overline{cd})
 MAKELEGAL(k, \overline{ad})
 end if
end while
Entferne e und f mitsamt aller inzidenten Kanten.
return T

allgemeinere Distanzfunktionen zu ersetzen (z.B. streng konvexe Distanzfunktionen)? Müssen die Objekte unserer Menge S immer Punkte sein?

6 Ein paar abschließende Worte

Im Laufe der Erstellung meiner Proseminar-Arbeit musste ich feststellen, dass einige Probleme aus der algorithmischen Geometrie eng zusammenhängen und nicht unabhängig voneinander ausschöpfend behandelt werden können. Desweiteren ist mir klar geworden, dass sich viele Verfahren, welche in der Euklidischen Ebene oder dem Euklidischen Raum operieren, problemlos auf abstrakte mathematische Strukturen übertragen lassen, die von dem Raum unserer Anschauung losgelöst sind. Leider konnte ich zwei sehr interessante Themen nicht mehr in die Arbeit einbringen, da diese jeweils den Umfang von mindestens einer Seminararbeit haben. Das erste Thema sind Voronoi-Diagramme unter anderen Metriken und das zweite Thema ist der Zusammenhang zwischen der zweidimensionalen Delaunay-Triangulation und der konvexen Hülle im \mathbb{R}^3 . Zu dem Zusammenhang zwischen zweidimensionalen Delaunay-Triangulationen und konvexen Hüllen möchte ich nur Folgendes kurz anmerken.

Betrachten wir das durch die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ definierte Paraboloid.

$\Phi(x, y, z) := (x, y)$ ist die Projektion von dem \mathbb{R}^3 in die x-y-Ebene. Sei nun (a, b) ein beliebiger Punkt im \mathbb{R}^2 . Betrachten wir die Tangentialebene von f in diesem Punkt:

$$T_{(a,b)}(x, y) = f(a, b) + \nabla f(a, b)(x - a, y - b)^T$$

Diese verschieben wir nun um r^2 nach oben und bestimmen den Schnitt mit dem Paraboloid.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= T_{(a,b)}(x, y) + r^2 \\ x^2 + y^2 &= f(a, b) + \nabla f(a, b)(x - a, y - b)^T + r^2 \\ x^2 + y^2 &= a^2 + b^2 + 2a(x - a) + 2b(y - b) + r^2 \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 &= r^2 \end{aligned}$$

Die Projektion des Schnittes entspricht somit einem Kreis K um den Punkt (a, b) mit dem Radius r . Befindet sich ein Punkt q des Paraboloiden oberhalb der Tangentialebene $T_{(a,b)}(x, y)$, so liegt $\Phi(q)$ außerhalb von K . Ist q selber Element der Tangentialebene so gilt $\Phi(q) \in \delta K$ und falls q unterhalb von $T_{(a,b)}(x, y)$ liegt, so gilt $\Phi(q) \in \overset{\circ}{K}$.

Wir haben nun ein Dreieck abc in der Ebene gegeben und wollen testen ob ein weiterer Punkt d im Umkreis von abc liegt. Als erstes bestimmen wir die von $(a, f(a)), (b, f(b)), (c, f(c))$ aufgespannte Ebene ⁵ E_{abc} (siehe Figur 14) und überprüfen die Lage von $(d, f(d))$ bezüglich E_{abc} . Dazu reichen einfache Methoden der analytischen Geometrie. Genau wie im letzten Absatz können wir Rückschlüsse auf die Lage von d bezüglich des Umkreises von abc machen und haben somit ein Verfahren entdeckt, welches den Umkreistest (Lemma 1) gut umsetzt. Wir sind sogar noch auf einen viel interessanteren Sachverhalt gestoßen. Gegeben sei eine Menge $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ mit $s_i \in \mathbb{R}^2$. Seien a, b, c Punkte aus S , sodass der Umkreis des Dreiecks abc keine weiteren Punkte aus S enthält. Aus unseren vorherigen Überlegungen folgt, dass alle Punkte $(s_i, f(s_i)) \in \mathbb{R}^3$ überhalb der von $(a, f(a)), (b, f(b)), (c, f(c))$ aufgespannten Ebene liegen. Das Dreieck $(a, f(a)), (b, f(b)), (c, f(c))$ ist somit eine Außenfläche der konvexen Hülle von $S' := \{(u, f(u)) \in \mathbb{R}^3 | u \in S\}$. Verfahren wir analog für alle Dreiecke in $D(S)$, so erhalten wir die untere konvexe Hülle von S' . Schränkt man $\Phi(x, y, z)$ auf den Graphen von f ein (das sind die Punkte des Paraboloiden), so erhält man eine Bijektion zwischen G_f und dem \mathbb{R}^2 . Das führt zu folgender Idee: Können wir $D(S)$ konstruieren, indem wir $CH(S')$ berechnen und in die Ebene projizieren? Da es für die Berechnung der dreidimensionalen konvexen Hülle effiziente Algorithmen gibt, wäre ein solches Resultat sehr erfreulich.

⁵ Bestimmung z.B. mittels 3-Punkte-Gleichung: $E_{abc}(s, t) = (a, f(a)) + s(b, f(b)) + t(c, f(c)) - (s + t)(a, f(a))$

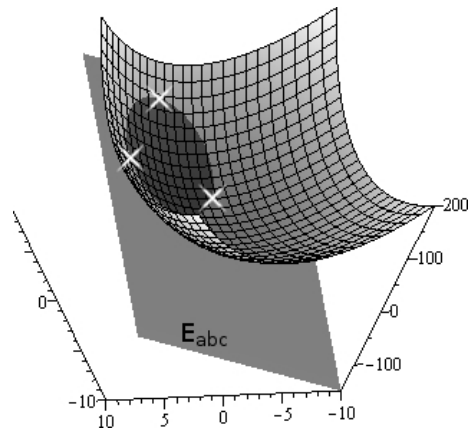


Fig. 14. Der Paraboloid $z=f(x,y)$ und die Ebene E_{abc}

References

- [CG] Mark de Berg, Otfried Cheong, Marc van Kreveld, Mark Overmars:
Computational Geometry - Algorithms and Applications, Thrid Edition
Springer-Verlag (2008)
- [EB] Herbert Edelsbrunner:
Algorithms in Computational Geometry
Springer-Verlag (1987)
- [KL] Rolf Klein:
Algorithmische Geometrie: Grundlagen, Methoden, Anwendungen
Springer-Verlag (2006)
- [IBM] Evanthia Papadopoulou et al.
<http://domino.watson.ibm.com/comm/research.nsf/pages/r.da.innovation.html>
IBM Research, Stand 5.01.2010
- [SH] Jürgen Schmidhammer
Catalan-Zahlen
Zulassungsarbeit zum Staatsexamen, Erlangen, Februar 1996