H. Wunderlich, T. Eibach
Universität Ulm
Institut für Theoretische Informatik

Aufgabenblatt 0 (Abgabe : keine)

Def. Sei M eine Menge. Eine *binäre Relation* auf M ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times M$. Man schreibt oft $x\,R\,y$ anstatt $(x, y) \in R$.

Def. Sei M eine nichtleere Menge. Eine binäre Relation R auf M heißt *Äquivalenzrelation* auf M gdw. sie die folgenden drei Eigenschaften besitzt:
Für alle $x, y, z \in M$ gilt:

a) (Reflexivität) $x\,R\,x$

b) (Symmetrie) $x\,R\,y$ gdw. $y\,R\,x$

c) (Transitivität) $x\,R\,y$ und $y\,R\,z$ impliziert $x\,R\,z$

Def. Sei R eine Äquivalenzrelation auf einer nichtleeren Menge M. Für $x \in M$ definieren wir die *Äquivalenzklasse von* x durch $[x]_R := \{y \in M \mid x\,R\,y\}$. Die *Menge der Äquivalenzklassen von* R, d.h. $\{[x]_R \mid x \in M\}$, bezeichnen wir mit M/R.

Def. Eine Menge $Z \subseteq \mathcal{P}(M)$ von Teilmengen einer nichtleeren Menge M heißt *Partition* von M, falls gilt:

a) (Überdeckung) $\bigcup Z = M$

b) $\emptyset \notin Z$

c) (Disjunktheit) Für alle $A, B \in Z$, $A \neq B$, gilt $A \cap B = \emptyset$.

Aufgabe 1
Beweisen Sie: Sei M eine nichtleere Menge. Jede Äquivalenzrelation auf M definiert eine Partition Z von M, und umgekehrt, jede Partition Z von M bestimmt eine Äquivalenzrelation auf M.

Aufgabe 2
Bestimmen Sie die Menge der Äquivalenzklassen von

a) der *Allrelation* auf M, d.h. $M \times M$.

b) der *Gleichheitsrelation* auf M, d.h. $\{(x, x) \mid x \in M\}$.

c) $R_m \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, m natürliche Zahl, wobei $x\,R_m\,y$ gilt gdw. $x \equiv y \mod m$.

Idee der vollständigen Induktion:
Sei $p(n)$ eine Aussage, die von einer natürlichen Zahl n abhängt. Gelten die Aussagen $p(0)$ (*Induktionsanfang*) und $\forall n \in \mathbb{N}\colon p(n) \to p(n+1)$ (*Induktionsschritt*), dann gilt die Aussage $\forall n \in \mathbb{N}\colon p(n)$.

Aufgabe 3
Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

a) $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$

b) $\sum_{i=1}^{n}(2\cdot i - 1) = n^2$

c) $H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$, wobei $H_m := \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}$ die *m-te harmonische Zahl* bezeichnet.

Werteverlaufsinduktion:
Eine Verallgemeinerung der vollständigen Induktion ist die *Werteverlaufsinduktion*: Sei wieder $p(n)$ eine Aussage, die von einer natürlichen Zahl n abhängt. Gelten die Aussagen $p(0)$ (*Induktionsanfang*) und $\forall n \in \mathbb{N}\colon p(0) \wedge \ldots \wedge p(n) \to p(n+1)$ (*Induktionsschritt*), dann gilt die Aussage $\forall n \in \mathbb{N}\colon p(n)$.

Aufgabe 4
Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. **Zeigen Sie** durch Werteverlaufsinduktion, daß n Produkt von Primzahlen ist.