Universität Ulm

Abgabe und Besprechung:
02.11.17, 14 Uhr
N24 - H15

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
F. Finckh
L. Niebel
WiSe 17/18

$20 + 4^*$ Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis II

Blatt 02

1. Berechnen Sie die Konvergenzradien der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für verschiedene a_n:

(i) $a_n = \frac{p(n)}{q(n)}$ für beliebige Polynome p und q, wobei $q(n) \neq 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$. (3)

(ii) $a_n = \begin{cases} \frac{3^k}{k} & n = 3k \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$ (2)

(iii) $a_n = \binom{2n}{n}$. (1)

2. (i) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen auf $[a,b]$ mit (1)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty < \infty.$$

Zeigen oder widerlegen Sie, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx = \int\limits_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)dx.$$

(ii) Sei $f_n \colon [1,\infty) \to \mathbb{R}; f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & : x \leq n \\ 0 & : x > n \end{cases} \;\; \forall n \in \mathbb{N}, x \in [1,\infty).$ (2)

Zeigen oder widerlegen Sie, dass f_n gleichmäig konvergiert und falls ja, ob

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_1^\infty f_n(x)dx = \int\limits_1^\infty \lim_{n\to\infty} f(x)dx \text{ gilt.}$$

(iii) Seien $f, g \colon (a,b) \to \mathbb{R}$ konvexe Funktionen. Definiere $h_1, h_2 : (a,b) \to \mathbb{R}$ durch $h_1(x) := \min\{f(x), g(x)\}$ und $h_2(x) := \max\{f(x), g(x)\}$

(a) Zeigen Sie, dass h_1 konvex ist oder widerlegen Sie es mit einem Gegenbeispiel. (1)

(b) Zeigen Sie, dass h_2 konvex ist oder widerlegen Sie es mit einem Gegenbeispiel. (1)

3. Sei $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit Ableitung f'. (4)
Zeigen Sie, dass für alle c zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ gilt: $\exists x_0 \in (a,b) \; : \; f'(x_0) = c$.
Hinweis: Beweisen Sie zuerst, dass im Fall $f'(a) < 0 < f'(b)$ ein $x \in [a,b]$ mit $f'(x) = 0$ esistiert

4. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$.

(i) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: (2)

$$f^{(n)}(x) = p_n\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), \forall x \neq 0$$

wobei p_n ein Polynom ist.

(ii) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar ist und es gilt $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (1)
Hier darf verwendet werden, dass $\lim\limits_{x \to 0_+} f^{(n)}(x) = \lim\limits_{x \to \infty} f^{(n)}(\frac{1}{x})$ *und* $\lim\limits_{x \to 0_-} f^{(n)}(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f^{(n)}(\frac{1}{x})$ $\forall n \in \mathbb{N}$

5. Seien $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ Potenzreihen mit Konvergenzradien $r_1 > 0$ bzw. $r_2 > 0$. Sei $r := \min\{r_1, r_2\}$.

(i) Zeigen Sie, dass gilt (1)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n \quad \forall z \in \mathbb{C} : |z| < r.$$

(ii) Sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $|z_n| < r \ \ \forall n \in \mathbb{N}$. Sei ferner $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = 0$. (4*)
Zeigen Sie, dass $f(z_n) = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$ impliziert, dass $a_k = 0 \ \ \forall k \in \mathbb{N}$

(iii) Sei z_n wie in (ii) und es gelte $f(x_n) = g(x_n) \forall n \in \mathbb{N}$. (1)
Folgern Sie, dass dann $a_k = b_k \ \ \forall k \in \mathbb{N}$.

Bemerkung: Diese Aufgabe ist sehr Technisch, liefert aber die Eindeutigkeit der Darstellung von Potenzreihen im Konvergenzradius.
Anleitung zu (ii):

- *Führe* $A := \{k \in \mathbb{N} : a_k \neq 0\} \neq \emptyset$ *wie folgt zu einem Widerspruch:*

- *Es gibt einen kleinsten Index* $k_0 \in A$*, schreiben Sie die Reihe als* $a_{k_0} z^{k_0} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} a_k z^k$.

- *Fixieren Sie ein* $\bar{z}$ *im Konvergenzbereich und zeigen mithilfe einer nahrhaften Eins, dass für alle betraglich kleineren z gilt, dass* $|\sum_{k=k_0+1}^{\infty} a_k z^k|$ *in Abhängigkeit von* $|z|^{k_0+1}$ *beschränkt ist.*

- *Schätzen Sie den Betrag von* a_{k_0} *mit dem von* z_n *ab und folgern mit dem Sandwichsatz einen Widerspruch zur Annahme.*