Universität Ulm

Abgabe und Besprechung:
09.11.17, 14 Uhr
N24 - H15

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
F. Finckh
L. Niebel
WiSe 17/18

$20 + 4^*$ Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis II

Blatt 03

1. Wir betrachten die Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^k$, $x \in \mathbb{R}$.

(i) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe. (1)

(ii) Zeigen Sie, dass im Konvergenzradius gilt: $f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$ (2)

2. Schreiben Sie $h(x) = \frac{xe^x}{(1-x)^2}$ für $x \in (-1, 1)$ in Form einer Potenzreihe. (1)

3. Sei X ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

(i) Sei $\|\cdot\|\colon X \to \mathbb{R}$ eine Norm auf X und $d(x,y) = \|x-y\|$, die von der Norm induzierte Metrik. Zeigen Sie: (1)

(a) $d(x+z, y+z) = d(x,y)\ \forall x, y, z \in X$

(b) $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x,y)$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ und $\forall x, y \in X$

(ii) Sei $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ eine Metrik, die zusätzlich auch die Eigenschaften (a) und (b) aus (i) erfüllt. Zeigen Sie, dass dann $\|x\| := d(x, 0)$ eine Norm auf X definiert. Charakterisieren Sie, wann eine Metrik auf X durch eine Norm induziert ist. (2)

(iii) Wir betrachten den Vektorraum der reellen Folgen $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Zeige, dass die Abbildung (2)

$$d\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R},\ d(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$$

eine wohldefinierte Metrik auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definiert, die nicht von einer Norm induziert ist. Hier ist $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Wir betrachten in dieser Aufgabe $M = \mathbb{Z}$ und $p > 0$ sei eine beliebige Primzahl. Zur Erinnerung, für $a, b \in \mathbb{Z}$ sagen wir, a teilt b, in Zeichen $a|b$, genau dann wenn es ein $c \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass $ac = b$. Wir definieren die Abbildung $d_p\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, wobei (3)

$$d_p(x,y) = p^{-\sup\{m\in\mathbb{N} \mid p^m \text{ teilt } (x-y)\}}$$

für $x, y \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass d_p eine Metrik auf $\mathbb{Z}$ ist.

5. Zeigen oder Widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

Sei $\emptyset \neq M$ und $d_1 \colon M \times M \to \mathbb{R}$, sowie $d_2 \colon M \times M \to \mathbb{R}$ zwei Metriken auf M. Dann sind auch die folgenden Abbildungen Metriken:

(i) $d(x, y) = \min\{d_1(x, y), d_2(x, y)\}$ (1)

(ii) $d(x, y) = \sup\{d_1(x, y), d_2(x, y)\}$ (1)

In der Vorlesung wurde bereits erwähnt, dass alle Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind. Zwei Metriken d_1, d_2 auf einer nicht leeren Menge M heißen äquivalent, falls Konstanten $m, M > 0$ existieren, sodass

$$md_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq Md_1(x, y)$$

für alle $x, y \in M$ gilt.

(iii) Alle Metriken auf dem $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent. (1.5)

6. Seien $a < b$, wir betrachten den Vektorraum $C^0([a, b])$ der stetigen reellwertigen Funktionen. Ferner betrachten wir die Norm

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|,$$

sowie

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x.$$

In den Tutorien werden Sie sehen, dass es sich bei $\|\cdot\|_\infty$ wirklich um eine Norm handelt.

(i) Beweisen Sie, dass $\|\cdot\|_1$ eine Norm auf $C^0([a, b])$ definiert. (2)

(ii) Zeigen Sie die folgende Ungleichung. Für alle $f \in C^0[a, b]$ gilt (1)

$$\|f\|_1 \leq (b - a)\|f\|_\infty.$$

(iii) Sind die Normen $\|f\|_1$ und $\|f\|_\infty$ äquivalent? (1.5)

7. Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter reeller Vektorraum, dann ist die Norm $\|\cdot\|$ genau dann von einem Skalarprodukt induziert, wenn für alle $x, y \in X$ (4*)

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \tag{6.1}$$

gilt. Beweisen Sie diese Aussage. Zeigen Sie dann, unter Verwendung dieser Charakterisierung, dass es einen normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ gibt, dessen Norm nicht von einem Skalarprodukt induziert ist. *Hinweis: Für die Rückrichtung benötigen Sie einen Kandidaten für das Skalarprodukt. Es ist von Vorteil, wenn dieser aus Termen besteht, die in der Gleichung (6.1) vorkommen.*