Universität Ulm

Abgabe und Besprechung:
23.11.17, 14 Uhr
N24 - H15

Prof. Dr. A. Dall'Acqua
F. Finckh
L. Niebel
WiSe 17/18

$20 + 4^*$ Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis II

Blatt 05

1. Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und $A \subset M$ eine Teilmenge. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen: (2)

(i) A ist abgeschlossen,

(ii) A ist vollständig, das heißt jede Cauchy-Folge mit Gliedern in A konvergiert mit Grenzwert in A.

2. Sei $D \neq \emptyset$. Sie haben in der Vorlesung bereits die Vollständigkeit des Funktionenraums $(C^0([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ gesehen. Wir betrachten den Raum der Beschränkten Funktionen $(\ell^\infty(D), \|\cdot\|_\infty)$ aus Aufgabe 4 von Übungsblatt 01. Zeigen Sie, dass $(\ell^\infty(D), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum ist. (5)

3. Geben Sie einen alternativen Beweis für die Vollständigkeit von $(C^0([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ unter Verwendung der Aussagen aus den Aufgaben **1** und **2**. (2)

4. Zeigen oder Widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Es existiert eine nichtleere Menge M, sodass für alle Metriken d auf M der metrische Raum (M, d) nicht vollständig ist. (3)

(ii) Die Aussage aus Aufgabe 4 von Übungsblatt 04 stimmt nicht, falls die Teilteilfolgen gegen verschiedene Grenzwert konvergieren. (1*)

(iii) In keinem metrischen Raum (M, d) existiert eine Menge $\emptyset \neq A \subsetneq M$ die gleichzeitig offen und abgeschlossen ist. (1)

(iv) Der Raum $(C^0[a,b], \|\cdot\|_1)$ aus Aufgabe 6 von Übungsblatt 03 ist vollständig. (3*)

5. Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen abgeschlossen sind. Beweisen Sie ihre Antworten.

(i) Im $\mathbb{R}^3$ mit dem euklidischen Abstand $\|\cdot\|_2$ die Menge (2)

$$A := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 \geq 2(x_2^3 + x_3^3)\}.$$

(ii) Im $\mathbb{R}^3$ mit dem euklidischen Abstand $\|\cdot\|_2$ die Menge (2)

$$B := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \geq -1, x_2 < 2, \|x\|_2 \leq \sqrt{5}\}.$$

(iii) Im normierten Raum $(C^0[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ die Menge (3)

$$C := \left\{ f \in C^0[a,b] \;\middle|\; f(a) = 1, f(b) = 2, f \text{ konvex und } \int_a^b f(x)dx = 7 \right\}.$$