Evolutionsgleichungen

Musterlösung zu Blatt 2

---

1. Falls $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ eine stark stetige Gruppe ist, gilt $T(t)T(-t) = Id$ und jedes $T(t)$ ist invertierbar. Sei jetzt $(T(t))_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgrupppe und $T(t_0)$ sei invertierbar für ein $t_0 > 0$. Dann gilt für $0 \leq s \leq t_0$
$$T(s)T(t_0 - s)T^{-1}(t_0) = Id,$$
woraus die Invertierbarkeit von $T(s)$ für alle $0 \leq s \leq t_0$ und daher aus $T(t) = T(t_0)^n T(s)$ mit $t = nt_0 + s$ ($n \in \mathbb{N}$) die von $T(t)$ für alle $t \geq 0$ folgt. Definiert man jetzt $T(t) = T(-t)^{-1}$ für $t \leq 0$, so erhält man eine stark stetige Gruppe: denn $T(-s-t)T(s+t) = Id = T(-s)T(-t)T(t+s)$ und $T(t-s)T(s-t) = Id = T(t-s)T(s)T(-t)$, $t, s \geq 0$, zeigt, dass $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ eine Gruppe ist; diese ist stark stetig, da auf Grund der Beschränktheit der Operatoren $T(t)$, $t \in \mathbb{R}$, starke Stetigkeit zu einem Zeitpunkt starke Stetigkeit zu allen Zeitpunkten ergibt.

2. Wie in der Vorlesung gezeigt, existieren $M \geq 1$ und $\delta > 0$ derart, dass $\|T(s)\| \leq M$ für alle $s \leq \delta$. Ist jetzt $t \geq 0$ beliebig, schreibe $t = n\delta + s$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq s \leq \delta$, und man erhält
$$\|T(t)\| = \|T(s)T^n(\delta)\| \leq MM^n = Me^{n\delta \frac{\ln M}{\delta}} \leq Me^{(n\delta+s)\frac{\ln M}{\delta}} = Me^{t\omega} \quad \text{mit } \omega := \frac{\ln M}{\delta}.$$

3. a) Falls $e^{tA}x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k x$ für alle $t \in \mathbb{R}$ konvergiert, konvergiert der Ausdruck natürlich auch absolut und $T(s)e^{tA}x = e^{tA}T(s)x$ für alle $s \geq 0$, da $T(s)$ und A auf $D(A)$ kommutieren und $T(s)$ ein beschränkter Operator ist. Ferner gilt die Funktionalgleichung, und die Ableitung von $e^{tA}x$ bezüglich t existiert und ist gleich $Ae^{tA}x$. Aus
$$\frac{d}{dt}(e^{-tA}T(t)x) = -Ae^{-tA}T(t)x + Ae^{-tA}T(t)x = 0$$
folgt $e^{-tA}T(t)x = e^{0A}T(0)x = x$ und daher $T(t)x = e^{tA}x$ für alle $t \geq 0$.
b) Mit Aufgabe 2) ergibt sich
$$\int_{\mathbb{R}} \|e^{-n\frac{(t-z)^2}{2}} T(t)x\| dt \leq \int_{\mathbb{R}} |e^{-n\frac{(t-z)^2}{2}}| Me^{\omega|t|} \|x\| dt = M\|x\| \int_{\mathbb{R}} |e^{-nt^2 + (2nz+\omega)|t| - nz^2}| dt$$
und damit die bezüglich z lokal gleichmäßige Konvergenz der Integrale gegen eine stetige Funktion $x_n(z)$.
Betrachte $x_n^N(z) := \sqrt{n/2\pi} \int_{-N}^{N} e^{-n(t-z)^2/2} T(t)x\, dt$. Diese Funktionenfolge konvergiert mit $N \to \infty$ gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{C}$ gegen die stetige Funktion $x_n(z)$, so dass es genügt, die Holomorphie der Funktionen $x_n^N(z)$ zu zeigen. Dazu schreibe $e^{-n(t-z)^2/2}T(t)x$ als Doppelreihe $\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{lk} t^l z^k T(t)x$. Da diese Reihe auf $[-N, N]$ gleichmäßig bezüglich t konvergiert, ergibt sich
$$x_n^N(z) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_{-N}^{N} e^{-n\frac{(t-z)^2}{2}} T(t)x\, dt = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} a_{lk} \int_{-N}^{N} t^l T(t)x\, dt \right) z^k.$$
Mit $\sqrt{n/2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-nt^2/2} dt = 1$ folgt
$$\lim_{n\to\infty} \|x_n(0) - x\| = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-n\frac{t^2}{2}} \|T(t)x - x\|\, dt \leq \epsilon/2 + 2M\|x\| \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_{\delta}^{\infty} (e^{-n\frac{t^2}{2} + \omega t} + e^{-n\frac{t^2}{2}})\, dt \leq \epsilon,$$
für alle $n \geq N$, wobei δ so klein gewählt wurde, dass $\|T(t)x - x\| \leq \epsilon/2$, und N so groß, dass
$$2M\|x\| \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_{\delta}^{\infty} (e^{-n\frac{t^2}{2} + \omega t} + e^{-n\frac{t^2}{2}})\, dt = 2M\|x\| \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{\delta\sqrt{n}}^{\infty} (e^{-\frac{t^2}{2} + \frac{\omega}{\sqrt{n}} t} + e^{-\frac{t^2}{2}})\, dt \leq \epsilon/2.$$

Zu guter Letzt hat man noch

$$T(s)x_n(0) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}}T(s)\int_{\mathbb{R}} e^{-n\frac{t^2}{2}}T(t)x\,dt = \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-n\frac{t^2}{2}}T(t+s)x\,dt = \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-n\frac{(t-s)^2}{2}}T(t)x\,dt.$$

c) Da $T(t)x_n(0) = x_n(t)$ und die $x_n(t)$ ganze Funktionen sind, ist $T(t)x_n(0)$ gegeben durch seine Taylor-Entwicklung im Punkt $t = 0$, woraus folgt, dass die $x_n(0)$ vollständige Vektoren sind, weshalb wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n(0) - x\| = 0$ die Menge der vollständigen Vektoren dicht in X liegt. Die Behauptung $T(t)x = e^{tA}x$ wird wie in a) gezeigt.