Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
R. Pröpper
WiSe 2011/2012

Blatt 1 zu **Funktionalanalysis** bis 31.10.

1. Zeige, dass die Folgenräume $l^p := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{R} \text{ und } \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p < \infty\}$, $1 \le p < \infty$, versehen mit der Norm $\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p := (\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p)^{1/p}$, Banachräume sind, d.h. zeige, dass die Menge l^p ein Vektorraum ist, dass $\|\cdot\|_p$ eine Norm auf l^p definiert und dass der normierte Vektorraum l^p vollständig ist.
   Um die Gültigkeit der Dreiecksungleichung, in diesem Kontext auch Minkowski-Ungleichung genannt, für $p > 1$ zu beweisen, zeige zuerst Youngs Ungleichung
   $$|ab| \le \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{q}|b|^q \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{R}, \quad 1 < p, q < \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$
   Zeige dann mittels der Young-Ungleichung die Hölder-Ungleichung für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^q$ mit $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,
   $$|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n| \le \|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p \|(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_q,$$
   und schließlich mit Hilfe der Hölder-Ungleichung die Minkowski-Ungleichung.
   Zeige, dass der Folgenraum $l^\infty := \{\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{R} \text{ und } \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < \infty\}$, versehen mit der Norm $\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$, ein Banachraum ist.

2. Zeige, dass die normierten Räume $(C^k[-1,1], \|\cdot\|_k)$, $k = 0, 1, \ldots$, der auf $[-1,1]$ k-mal stetig differenzierbaren Funktionen Banach-Räume sind, wobei $\|f\|_k := \sum_{i=0}^{k} \sup_{x\in[-1,1]} |f^{(i)}(x)|$.
   Zeige, dass der Unterrraum $(C^{(k+1)}[-1,1], \|\cdot\|_k)$ nicht abgeschlossen in $(C^k[-1,1], \|\cdot\|_k)$ ist.

3. Zeige, dass $C[0,2]$ bezüglich der Norm $\|f\|_p := (\int_0^2 |f(x)|^p\, dx)^{1/p}$, $1 \le p < \infty$ nicht vollständig ist. (Man überlege sich zuerst, dass $\|\cdot\|_p$ wirklich eine Norm auf $C[0,2]$ ist, wobei die Dreiecksungleichung ähnlich wie in Aufgabe 1 gezeigt wird.)

4. a) Folgere aus dem Satz von Baire, dass für jede Folge $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offener und dichter Teilmengen eines vollständigen metrischen Raums X auch deren Durchschnitt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ dicht in X liegt.
   b) Zeige mit dem Satz von Baire, dass die Menge der Funktionen $f \in C[0,1]$, die nirgendwo differenzierbar sind, dicht in $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ liegt.
   Betrachte dazu die Mengen
   $$O_n := \left(g \in C[0,1] : \sup_{0<|h|<\frac{1}{n}} \left| \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right| > n\ \forall x \in [0,1] \right)$$
   und zeige, dass diese offen und dicht in $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ sind.