ulm university universität
uulm

Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
R. Pröpper
WiSe 2011/2012

Blatt 10 zu **Funktionalanalysis** bis 16.01.

1. Sei $K \in C([0,1]^2)$. Der Integraloperator $T_K : C[0,1] \mapsto C[0,1]$, gegeben durch
$$(T_K f)(y) = \int_0^y K(y,x) f(x)\, dx,$$
heißt Volterrascher Integraloperator.
Man zeige, dass T_K kompakt ist, und bestimme das Spektrum von T_K.
(Hinweis: Beachte Aufgabe 4 b) von Blatt 2.)

2. Seien $p, q, r \in [1, \infty]$ mit $p^{-1} + q^{-1} = r^{-1}$. Sei (Ω, μ) ein Maßraum und seien $f, g : \Omega \mapsto \mathbb{K}$ zwei messbare Funktionen.
Zeige: $\|f \cdot g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$. Wann gilt Gleichheit?

3. Sei X ein komplexer Banachraum, $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ ($a_i \in \mathbb{C}$) ein Polynom und $T \in \mathcal{L}(X)$. Dann ist natürlich auch $P(T) := \sum_{i=0}^{n} a_i T^i \in \mathcal{L}(X)$.
Zeige: $P(\sigma(T)) = \sigma(P(T))$ und ebenso für das Punktspektrum $P(\sigma_p(T)) = \sigma_p(P(T))$.
(Hinweis: Polynome kann man faktorisieren.)

Einen guten Rutsch ins neue Jahr