Blatt 12 zu **Funktionalanalysis** bis 30.01.

1. Zeige

$$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \leq 2\|f\|_p^p + 2\|g\|_p^p, \qquad \text{für } p \in (1,2].$$

2. Sei $(\Omega,\mu)$ Maßraum, $f_1,\dots,f_n : \Omega \to (-\infty,+\infty]$ messbar mit $p_1,\dots,p_n \in [1,\infty]$ und $p_1^{-1} + \dots + p_n^{-1} = 1$. Zeige die verallgemeinerte Hölder-Ungleichung

$$\|f_1 \cdot \ldots \cdot f_n\|_1 \leq \|f_1\|_{p_1} \cdot \ldots \cdot \|f_n\|_{p_n}.$$

3. Sei $(\Omega,\mu)$ Maßraum und $p,q \in (1,\infty)$ mit $p^{-1}+q^{-1} = 1$. Zeige, dass

$$\gamma : L^q(\Omega,\mu) \ni g \mapsto \gamma_g \in (L^p(\Omega,\mu))'$$

ein isometrischer Isomorphismus ist, wobei

$$\gamma_g : L^p(\Omega,\mu) \ni f \mapsto \int_\Omega f \cdot g \, d\mu \in \mathbb{C}.$$

(Hinweis: Um die Surjektivität zu zeigen, nutze man die Reflexvität von $L^p(\Omega,\mu)$ aus.)

4. Sei $E$ ein gleichmäßig konvexer Banach-Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $E$, die schwach gegen $x \in E$ konvergiert und für die $\limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \leq \|x\|$ gilt.
Zeige, dass dann sogar $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$ gilt.