Blatt 13 zu **Funktionalanalysis** bis 06.02.

1. Sei (Ω, μ) ein σ-endlicher Maßraum, der nicht nur aus endlich vielen Atomen besteht.
   Zeige, dass dann $L^1(\Omega.\mu)$ (und daher auch $L^\infty(\Omega.\mu)$ - warum?) nicht reflexiv ist.
   (Hinweis: Beachte dazu die Ausführungen im Skript)

2. Sei Ω eine messbare Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit $\mu(\Omega) > 0$ und μ Lebesgue-Maß.
   Zeige, dass dann $L^\infty(\Omega, \mu)$ nicht separabel ist.

3. Sei X reflexiver Banachraum, $C \subset X$ abgeschlossen und konvex. Sei $f : C \mapsto \mathbb{R}$ nach unten halbstetig (d.h. die Mengen $\{x \in C : f(x) \leq c\}$ sind für alle $c \in \mathbb{R}$ abgeschlossen), konvex und $\lim\limits_{x \in C, \|x\| \to \infty} f(x) = \infty$.
   Zeige, dass f ein Minimum auf C annimmt.
   (Hinweis: Siehe auch Aufgabe 2 von Blatt 8)

4. Der Satz von Dvoretzky-Rogers besagt, dass in jedem unendlichdimensionalen Banachraum X eine unbedingt konvergente Reihe existiert (d.h. $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ konvergiert gegen denselben Grenzwert x, egal in welcher Reihenfolge die Summanden angeordnet werden), die nicht absolut konvergiert (d.h. $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_X$ konvergiert nicht).
   Finde Beispiele derartiger Reihen für $X = l^p$, $1 < p \leq \infty$.