ulm university universität uulm

Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
R. Pröpper
WiSe 2011/2012

Blatt 2 zu **Funktionalanalysis** bis 07.11.

1. a) Betrachte folgende Folgenräume über $\mathbb{R}$:
   $c_{00} := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} | \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N : x_n = 0\}$, $\quad c_0 := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} | \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\}$,
   $c := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} | \exists a \in \mathbb{R} : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a\}$, $\quad l^\infty := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$ jeweils mit Supremumsnorm, d.h. $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$, und $l^p := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < \infty\}$ mit l^p-Norm, d.h. $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p := (\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p)^{1/p}$, für $1 \leq p < \infty$.
   Zeige folgende strikte Inklusionen: $c_{00} \subsetneq l^q \subsetneq l^p \subsetneq c_0 \subsetneq c \subsetneq l^\infty$, $1 \leq q < p < \infty$, und sogar $\bigcup\limits_{1\leq p<\infty} l^p \subsetneq c_0$. Zeige zudem, dass c_{00} dicht in c_0 liegt und dass für $1 \leq q < p \leq \infty$ und für alle $x \in l^q$ die Ungleichung $\|x\|_p \leq \|x\|_q$ besteht. Zeige weiter, dass für jedes $x \in l^1$ gilt: $\lim\limits_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.
   b) Zeige, dass c_0 isomorph zu c ist.

2. Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf dem Vektorraum $\mathcal{P}$ aller Polynome über $\mathbb{R}$. Zeige, dass $(\mathcal{P}, \|\cdot\|)$ kein Banachraum ist und dass insbesondere $\mathcal{P}$, wenn man jedes Polynom als Funktion auf dem Intervall $[0,1]$ betrachtet, von erster Kategorie in $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ ist.

3. Zeige, dass l^q von erster Kategorie in l^p für alle $1 \leq q < p \leq \infty$ ist. Schließe daraus, dass die Inklusion $\bigcup\limits_{1\leq q<p} l^q \subset l^p$ strikt ist.

4. a) Es sei X ein vollständiger, metrischer Raum und $T : X \to X$ eine stetige Abbildung. Ist T^k eine Kontraktion für ein $k \in \mathbb{N}$, so hat T genau einen Fixpunkt.
   b) Seien $K(\cdot,\cdot) : [a,b] \times [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ and $\phi(\cdot) : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ stetige Funktionen, wobei $[a,b]$ ein Intervall in $\mathbb{R}$ ist. Betrachte die Volterra-Gleichung
   $$f(x) = \lambda \int_a^x K(x,y) f(y)\, dy + \phi(x),$$
   d.h. gesucht ist eine Funktion $f \in C[a,b]$, die obige Gleichung erfüllt.
   Benutze Teil a), um zu zeigen, dass die Volterra-Gleichung für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung hat.