Blatt 9 zu **Funktionalanalysis** bis 09.01.

1. Sei X ein Banachraum, $T \in \mathcal{L}(X)$ und T' der zu T adjungierte Operator.

   a) Zeige $\sigma(T) = \sigma(T')$.

   b) Sei jetzt $\|T\| \in \sigma(T)$. Man zeige, dass dann $\|Id + T\| = 1 + \|T\|$ gilt.

2. Bestimme das Spektrum, das Punktspektrum und das approximative Punktspektrum des Linksshifts $S_l : \ell^p \mapsto \ell^p$, gegeben durch $S_l(x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots)$ $(x_1, x_2, \dots \in \mathbb{C})$, und des Rechtsshifts $S_r : \ell^p \mapsto \ell^p$, gegeben durch $S_l(x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_1, \dots)$ $(x_1, x_2, \dots \in \mathbb{C})$, für alle $1 \leq p \leq \infty$.

3. Sei M ein kompakter, metrischer Raum, $C(M)$ der Raum der stetigen Funktionen auf M und $h \in C(M)$.
   Bestimme das Spektrum des Multiplikationsoperators $T_h : C(M) \mapsto C(M)$, gegeben durch $T_h(f) = hf$.
   Untersuche ferner, wann ein $\lambda \in \sigma(T)$ Eigenwert ist.

4. Sei K eine kompakte, nichtleere Teilmenge von $\mathbb{C}$. Zeige, dass es einen Operator $T \in \mathcal{L}(\ell^2)$ mit $\sigma(T) = K$ gibt.

   (Hinweis: Betrachte $(x_n) \mapsto (y_n x_n)$.)