Funktionalanalysis

Lösung zu Blatt 13

1. Man unterscheidet die beiden Fälle

   (a) $\forall\epsilon > 0 \exists\omega \subset \Omega$ messbar mit $0 < \mu(\omega) < \epsilon$.

   (b) $\exists\epsilon > 0$ s.d. $\mu(\omega) \geq \epsilon \ \forall\omega \subset \Omega$ messbar mit $\mu(\omega) > 0$.

   Im zweiten Fall besteht der Maßraum, da (Ω, μ) σ-endlich ist, aus einer höchstens abzählbaren (nach Voraussetzung aber nicht endlichen) Anzahl von Atomen A_n und $\infty > \mu(A_n) > \epsilon > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist jede (Äquivalenzklasse von) Funktion(en) in $L^1(\mu)$ konstant (f.ü) auf den Atomen, weshalb $L^1(\mu)$ isometrisch isomorph zu ℓ^1 und somit nicht reflexiv ist.
   Es liege jetzt der erste Fall vor, und wir nehmen an, $L^1(\mu)$ wäre reflexiv. Betrachte dann eine Folge von Mengen Ω_n mit $0 < \mu(\Omega_n) \leq 1/2^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, und setze $X_n = \cup_{i=n}^{\infty}\Omega_i$, d.h. $0 < \mu(X_n) \leq 1/2^n$ und $X_{n+1} \subseteq X_n$. Definiere die Funktionen $u_n = \mathbf{1}_{X_n}/\|\mathbf{1}_{X_n}\|_1$, $n \in \mathbb{N}$. Da $\|u_n\|_1 = 1$ ist und wir angenommen haben, $L^1(\mu)$ sei reflexiv, existiert eine schwach-konvergente, ebenfalls mit u_n bezeichnete Teilfolge mit Grenzwert $u \in L^1(\mu)$. Es ist $\int_\Omega u_n \mathbf{1}_{X_i} d\mu = 1$ für $n \geq i$ und wegen $\mathbf{1}_{X_i} \in L^\infty(\mu) = (L^1(\mu))'$ ist auch $\int_\Omega u\mathbf{1}_{X_i} d\mu = 1$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Aus dem Satz über dominierte Konvergenz ($|u\mathbf{1}_{X_i}| \leq |u|$) folgt aber wegen $\lim_{i\to\infty} u\mathbf{1}_{X_i} = 0$ f.ü., dass $0 = \int_\Omega \lim_{i\to\infty}(u\mathbf{1}_{X_i}) d\mu = \lim_{i\to\infty}\int_\Omega u\mathbf{1}_{X_i} d\mu = 1$, ein Widerspruch.

2. Wegen $\mu(\Omega) > 0$ finden wir eine abzählbare Familie von paarweise disjunkten Mengen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $X_n \subset \Omega$ und $\mu(X_n) > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt aber für die überabzählbare Familie $(\mathbf{1}_{\cup N})_{N\subseteq\mathbb{N}}$ von charakteristischen Funktionen, dass $\|\mathbf{1}_{\cup N} - \mathbf{1}_{\cup N'}\|_\infty = 1$, falls $N \neq N'$. D.h. $L^\infty(\Omega, \mu)$ kann keine dichte, abzählbare Teilmenge besitzen.

3. Sei $x \in C$ und $f(x) = c$. Dann ist die Menge $M := \{x \in C : f(x) \leq c\}$ beschränkt wegen $\lim_{x\in C, \|x\|\to\infty} = \infty$, abgeschlossen, da f unterhalb stetig ist, und konvex, da f konvex ist. Sei $m = \inf_{x\in M} f(x)$ und x_n eine Folge in M mit $f(x_n) \to m$.
   Da X reflexiv ist und die Folge x_n beschränkt ist, existiert eine schwach-konvergente Teilfolge $x_{n_k} \rightharpoonup x$. Für $\epsilon > 0$ wähle die Folge x_{n_k} derart, dass $f(x_{n_k}) \leq m+\epsilon$ (bzw. $f(x_{n_k}) \leq -N$, $N \in \mathbb{N}$, falls $m = -\infty$). Da M konvex ist, gilt $x \in M$ und es existiert eine Folge y_n von Konvexkombinationen der x_{n_k}, also insbesondere $f(y_n) \leq m + \epsilon$, die in Norm gegen x konvergiert. Da f unterhalb stetig ist, gilt $f(x) \leq m + \epsilon$. Da ϵ beliebig war, folgt $f(x) \leq m$, also $f(x) = m$ und inbesondere $m < \infty$.

4. Man nehme z.B. $x_n = (1/n)\delta_n = (0, \ldots, 0, 1/n, 0, \ldots)$. Dann divergiert $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|_p = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n = \infty$, aber für jede Anordnung konvergiert die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ gegen die harmonische Folge $h = (1, 1/2, 1/3, \ldots)$ und $h \in \ell^p$ für $1 < p \leq \infty$.