Funktionalanalysis

Lösung zu Blatt 3

---

1. Sei $x \in l^\infty$ und $0 \le x \le 1$ (komponentenweise). Dann gilt $1 = LIM(\mathbf{1}) = LIM(1-x)+LIM(x)$, und aus $LIM(1-x) \ge 0$, $LIM(x) \ge 0$ folgt $LIM(x) \le 1$. Sei nun $\|x\|_\infty=1$. Dann ist $1 \ge (\mathbf{1} \pm x)/2 \ge 0$ (komponentenweise), also $0 \le LIM(\mathbf{1}) \pm LIM(x) \le 2$ und somit $LIM(x) \le 1$ und $LIM(x) \ge -1$.

   Sei $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty$. Setze $\overline{x} := \limsup x_n$ und $\underline{x} := \liminf x_n$. Dann existiert für alle $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\inf(T^N x) := \inf x^N \ge \underline{x} - \epsilon$ und $\sup x^N \le \overline{x} + \epsilon$. Es gilt $0 \le LIM(x^N - \underline{x} + \epsilon) = LIM(x) - \underline{x} + \epsilon$ oder $\underline{x} - \epsilon \le LIM(x)$, und genauso $\overline{x} + \epsilon \ge LIM(x)$.

   Sei $x = (0, 1, 0, 1, \ldots)$ und $y = (1, 0, 1, 0, \ldots)$. Dann ist $LIM(x \cdot y) = 0$, aber $2LIM(x) = LIM(x + y) = 1$, also $LIM(x)LIM(y) = 1/4$.

   Existenz: Betrachte das Funktional $l((x_i)) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n x_i = \lim\limits_{n\to\infty} x_i$ auf dem in l^∞ abgeschlossenen Unterraum c und erweitere mit Hahn-Banach auf ganz l^∞. Dann gilt $l(x) \le \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n x_i$ und $l(-x) \le \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n -x_i$ oder $l(x) = -l(-x) \ge -\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n -x_i = \liminf\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n x_i$. Es folgt unmittelbar $l(\mathbf{1}) = 1$ und $l(x) \ge 0$ für $x \ge 0$ (komponentenweise). $l(Tx) = l(x)$ bzw. $l(x - Tx) = 0$ erhält man aus $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n (x_i - x_{i+1}) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_1 - x_{n+1}) = 0$.

2. Für $x = (x_n) \in l^1$ und $y = (y_n) := (\text{sign } x_n) \in l^\infty$ ist $(Tx)(y) = \|x\|_1$, also $\|Tx\| \ge \|x\|_1$. Sei jetzt $y = (y_n) \in l^\infty$ mit $\|y\|_\infty = 1$ beliebig, dann ist $|(Tx)(y)| = |\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n| \le \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n||y_n| \le \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = \|x\|_1$, also $\|Tx\| \le \|x\|_1$.

   Ein Banachlimes liegt nicht im Bild von T, weil $LIM(x) = 0$ für alle $x \in c_0$ und daher gelten würde, falls $LIM = Ty$ für ein $y = (y_n) \in l^1 \subset c_0$, dass $0 = (Ty)(y) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} y_n^2$ und somit $LIM \equiv 0$ im Widerspruch zu $LIM(\mathbf{1}) = 1$ wäre.