Funktionalanalysis
Lösung zu Blatt 5

---

1. Für $x = (x_n) \in l^1$ und $y = (y_n) \in c_0$ betrachte den linearen Operator $T : l^1 \mapsto (c_0)'$, der gegeben ist durch $(Tx)y = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$. T ist isometrisch, da $|\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|x\|_1$ für $\|y\|_\infty \leq 1$ und $\sup_{n\in\mathbb{N}}(\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i^n) = \|x\|_1$, wobei $y^n = (y_i^n) \in c_0$ gegeben ist durch $y_i^n = \text{sign } x_i$ für $i \leq n$ und $y_i^n = 0$ für $i > n$.
   Sei $\phi \in (c_0)'$ und $\phi(e_n) =: x_n$ $(e_n = (\delta_{in})_{i\in\mathbb{N}})$. Dann gilt $\phi(\sum_{i=1}^{n} |x_i| e_i) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq \|\phi\|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und daher $x := (x_n) \in l^1$ und $T(x)y = \phi(y)$ für alle $y \in c_{00}$ und damit auch für alle $x \in c_0$, d.h. $T(x) = \phi$ und T ist surjektiv.
   Da $(l^1)' = l^\infty$, ist c_0 nicht reflexiv.

2. Die erste Aussage folgt unmittelbar aus den Definitionen (und als Gegenbeispiel wähle z.B. $[0,1] \subset \mathbb{R}$).
   $M^\circ = \{\phi : |\langle \phi, x\rangle| = |x(\phi)| \leq 1 : \forall x \in M\} = \bigcap_{x\in M} x^{-1}(\{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq 1\})$ ist als Durchschnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen und das gleiche für ${}^\circ N$.
   Dass M° und ${}^\circ N$ absolutkonvex sind, folgt wieder direkt aus der Definition.
   Dass aus der genannten Bedingung absolutkonvex folgt, ist klar. Um die andere Richtung zu beweisen, beachte $\lambda x + \mu y = \big((|\lambda|(e^{i\arg(\lambda)}x) + |\mu||(e^{i\arg(\mu)}y))/(|\lambda| + |\mu|)\big)(|\lambda| + |\mu|) \in M$ für $x, y \in M$.

3. Definiere $T : X \mapsto \mathbb{K}^n$ durch $T(x) = (\phi_k(x))_{1\leq k\leq n}$. T ist ein linearer und stetiger Operator. Das Bild F der Abbildung T ist ein Unterraum von $\mathbb{K}^n$. Nach dem Satz von der offenen Abbildung ist $T(\{x \in X : \|x\| \leq C+\epsilon\})$ eine abgeschlossene Nullumgebung in F, die natürlich auch absolutkonvex ist.
   Angenommen die Behauptung ist falsch, d.h. $c = (c_k)_{1\leq k\leq n} \notin T(\{x \in X : \|x\| \leq C + \epsilon\})$. Dann existiert nach dem Satz von Hahn-Banach für absolutkonvexe Mengen ein Funktional $\psi \in F'$ mit $|\psi(Tx)| < |\psi(c)|$ für alle $x \in \{x \in X : \|x\| \leq C + \epsilon\}$.
   Da F ein Unterraum des $\mathbb{K}^n$ ist, lässt sich jedes $\psi \in F'$ schreiben als $\psi(y) = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n$ für ein $(\alpha_k)_{1\leq k\leq n} \in F$, wobei $y = (y_1, \ldots, y_n) \in F \subset \mathbb{K}^n$. Man erhält folgenden Widerspruch

$$(C+\epsilon)\|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k\| = \sup_{\|x\|\leq C+\epsilon} |\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k(x)| < |\sum_{k=1}^{n} \alpha_k c_k| \leq C\|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k\|.$$

4. Seien x und y Grenzwerte der Folge x_n bezüglich $\sigma(X, M)$-Konvergenz. Es gilt $\phi(x-y) = \lim_{n\to\infty} \phi(x-x_n) + \phi(x_n - y) = 0$ für alle $\phi \in M$. Also ist der Grenzwert genau dann eindeutig, wenn M punktetrennend ist, d.h. zu jedem $0 \neq x \in X$ existiert $\phi \in M$ mit $\phi(x) \neq 0$. Insbesondere ist daher der Grenzwert bezügölich $\sigma(X', X)$-Konvergenz eindeutig.