Funktionalanalysis
Lösung zu Blatt 9

---

1. a) $\sigma(T) = \sigma(T')$ folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass $(\lambda - T)$ genau dann invertierbar ist, wenn $(\lambda - T')$ invertierbar ist.

   b) $\|Id + T\| \leq 1 + \|T\|$ ist klar.
   Wegen $\|T\| \in \partial\sigma(T)$ existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $x \in X$ mit $\|x\| = 1$ und $\epsilon \geq \|(\|T\|Id - T)x\| = \|(\|T\|Id + Id)x + (-Id - T)x\| \geq (\|T\| + 1) - \|(Id + T)x\|$, also $\|(Id + T)\| \geq \|T\| + 1 - \epsilon$.

2. Wegen $\|S_l\|_p = 1$ und wegen $\lambda(x_1, \lambda x_1, \lambda^2 x_1, \ldots) - S_l(x_1, \lambda x_1, \lambda^2 x_1, \ldots) = 0$, wobei $x_1 \neq 0$ sein soll, und $(x_1, \lambda x_1, \lambda^2 x_1, \ldots) \in l^p$ für $\lambda < 1$, falls $p < \infty$, und für $\lambda \leq 1$, falls $p = \infty$, und da jeder Eigenvektor notwendigerweise von obiger Gestalt ist, gilt $\sigma_P(S_l) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$, $\sigma_a(S_l) = \sigma(S_l) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$ für $p < \infty$ und $\sigma_P(S_l) = \sigma(S_l) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$ für $p = \infty$.

   Aus $(\lambda Id - S_r)(x_1, x_2, \ldots) = (\lambda x_1 - 0, \lambda x_2 - x_1, \ldots) \stackrel{!}{=} (0, 0, \ldots)$ folgt $x_1, x_2, \ldots = 0$, also $\sigma_P(S_r) = \emptyset$.
   Aus $(\lambda x_1 - 0, \lambda x_2 - x_1, \ldots) \stackrel{!}{=} (y_1, y_2, \ldots)$ folgt $x_1 = y_1/\lambda$, $x_2 = y_1\lambda^2 + y_2/\lambda$, $\ldots$,$x_n = y_1/\lambda^n + y_2/\lambda^{n-1} + \cdot + y_n/\lambda$,$\ldots$, weshalb $(1, 0, 0, \ldots)$ nicht im Bild von $(\lambda - S_r)$ für $\lambda < 1$ ist, und daraus zusammen mit $\|S_r\| = 1$, dass $\sigma(S_r) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$, $1 \leq p \leq \infty$.
   Aus $\|(\lambda - S_r)x\| \geq |\,\|S_r x\| - |\lambda|\|x\|\,| = (1 - |\lambda|)\|x\|$ und obigem folgt $\sigma_a = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.

3. $\sigma(T_h) = \{\lambda \in \mathbb{C} | \exists x \in M : \lambda = h(x)\}$ (s. Vorlesung).
   $\lambda \in \mathbb{C}$ ist genau dann ein Eigenwert, wenn ein $x \in M$ und ein $\epsilon > 0$ existieren mit $h(B_\epsilon(x)) \equiv \lambda$.

4. Wähle eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n \in K$ derart, dass die Menge $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in K liegt. Definiere den Operator $T \in \mathcal{L}(\ell^2)$ durch $T(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (y_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann sind wegen $(y_n Id - T)e_n = 0$ alle y_n in $\sigma(T)$ und deshalb $K \subset \sigma(T)$. Für $\lambda \notin K$ gilt $(\lambda - T)T_\lambda = T_\lambda(\lambda - T) = Id$, wobei $T_\lambda \in \mathcal{L}(\ell^2)$ durch $T_\lambda(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n/(\lambda - y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben ist, also $K = \sigma(T)$.