Elemente der Funktionentheorie, Klausur 1

Sommersemester 2017, Prof. Dr. Friedmar Schulz, Marius Müller

Erlaubte Hilfsmittel: keine (im Anhang befindet sich eine kleine Formelsammlung)
Es sind **120 Punkte** erreichbar, jedoch zählen 100 Punkte als 100 Prozent. Bitte auf jedem Blatt nur eine Aufgabe bearbeiten und dokumentenechte Stifte verwenden. Falls zwei undurchgestrichene Lösungen für dieselbe Aufgabe abgegeben werden, so wird die schlechtere gewertet. Daher bitte alle Rechenwege bis auf einen sauber durchstreichen. Antworten sind stets zu begründen. Das Angabenblatt darf nach Abgabe der Klausur mit nach Hause genommen werden. Bitte nichts, was in die Wertung eingehen soll, auf das Angabenblatt schreiben!
VIEL ERFOLG!

Aufgabe 1:(5 Punkte)
Berechne

$$\left|\frac{4+6i}{6+4i}\right|.$$

Lösungsvorschlag:

$$\left|\frac{4+6i}{6+4i}\right| = \frac{|4+6i|}{|6+4i|} = \frac{\sqrt{4^2+6^2}}{\sqrt{6^2+4^2}} = 1.$$

Aufgabe 2:(10 Punkte)
Zeige: Für $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ gilt

$$\sum_{j=0}^{k-1} \cos\left(j\frac{2\pi}{k}\right) = 0.$$

Lösungsvoschlag:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k-1} \cos\left(j\frac{2\pi}{k}\right) &= \sum_{j=0}^{k-1} \mathrm{Re}\left(e^{\frac{2j\pi i}{k}}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{j=0}^{k-1} e^{\frac{2j\pi i}{k}}\right) \\
&= \mathrm{Re}\sum_{j=0}^{k-1}\left(e^{\frac{2\pi i}{k}}\right)^j \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{1-\left(e^{\frac{2\pi i}{k}}\right)^k}{1-e^{\frac{2\pi i}{k}}}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{2\pi i}}{1-e^{\frac{2\pi i}{k}}}\right) \\
&= \mathrm{Re}(0) = 0.
\end{aligned}$$

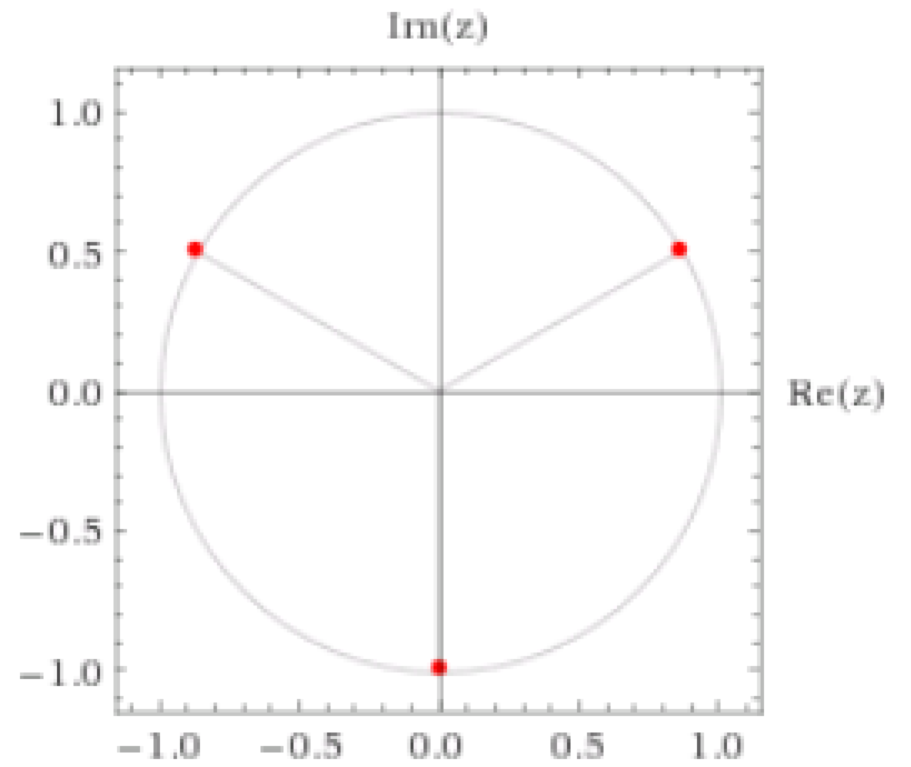
Aufgabe 3:(10 Punkte)
Finde alle Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $z^3 = i$ und skizziere diese Zahlen als Punkte in der komplexen Zahlenebene.
Lösungsvorschlag: Zunächst stellen wir i in Polarkoordinaten dar. Es gilt, dass $|i| = 1$ und $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$. Nun hat man also oben die Gleichung

$$z^3 = e^{\frac{i\pi}{2}}$$

und mit der Formel zur komplexen Wurzel lösen wir

$$z_k = e^{\frac{i\pi}{6} + \frac{2k\pi i}{3}} \quad (k = 0, 1, 2).$$

Die Skizze sollte in etwa wie folgt aussehen.



Aufgabe 4:(5+7+8=20 Punkte)
a) Bestimme eine Parametrisierung des Kreises $\partial D(i;3) := \{z \in \mathbb{C} : |z-i| = 3\}$.
Hinweis: Unter einer Parametrisierung verstehen wir eine geschlossene Kurve γ, und ein Intervall I sodass γ auf $\mathring{I}$ injektiv ist und $\gamma(I) = \partial D(i,3)$ gilt. All diese Eigenschaften müssen nicht gezeigt werden, es genügt völlig, die Kurve γ und das Intervall I anzugeben.
Lösungsvorschlag: Wir setzen $\gamma(t) = i + 3e^{it}$ für $t \in [-\pi, \pi]$.
b) Berechne

$$\int_{|z-i|=3} z \, dz.$$

Aufgabenteil (a) darf - muss aber nicht - hierfür verwendet werden.
Lösungsvorschlag: Die Funktion $f(z) = z$ ist holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ und damit verschwindet das Integral nach dem Cauchy'schen Integralsatz.
c) [Nicht zu lang dran aufhalten!] Berechne

$$\int_{|z-i|=3} \overline{z} e^z \, dz.$$

Lösungsvorschlag:

$$\begin{aligned}
\int_{|z-i|=3} \overline{z} e^z \, dz &= \int_{|z-i|=3} \overline{(z-i+i)} e^z \, dz \\
&= \int_{|z-i|=3} (\overline{z-i} + \overline{i}) e^z dz \\
&= \int_{|z-i|=3} \overline{(z-i)} e^z \, dz + \int_{|z-i|=3} \overline{i} e^z \, dz \\
&= \int_{|z-i|=3} \frac{(z-i)\overline{(z-i)}}{z-i} e^z \, dz - i \int_{|z-i|=3} e^z \, dz \\
&= \int_{|z-i|=3} \frac{|z-i|^2}{z-i} e^z \, dz - i \cdot 0 \\
&= \int_{|z-i|=3} \frac{9}{z-i} e^z \, dz = 9 \cdot 2\pi i e^i = 18\pi i e^i,
\end{aligned}$$

wobei wir den Cauchy'schen Integralsatz und die Cauchy'sche Integralformel sowie die Linearität des Kurvenintegrals benutzt haben.

Aufgabe 5:(10 Punkte)
Berechne

$$\int_{|z-i|=2} \frac{1}{(z^2+5)^2} dz.$$

Lösungsvorschlag: Die Nullstellen des Nenners sind die Lösungen der Gleichung $z^2 = -5$, die durch $z_1 = i\sqrt{5}$ und $z_2 = -i\sqrt{5}$ gegeben sind. Genauer können wir schreiben

$$(z^2+5)^2 = \Big((z-\sqrt{5}i)(z+\sqrt{5}i)\Big)^2 = (z-\sqrt{5}i)^2(z+\sqrt{5}i)^2$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}
|-\sqrt{5}i - i| &= |-i(\sqrt{5}+1)| = \sqrt{5}+1 > \sqrt{5} > \sqrt{4} = 2 \\
|\sqrt{5}i - i| &= |i(\sqrt{5}-1)| = (\sqrt{5}-1) < \sqrt{9} - 1 = 3 - 1 = 2
\end{aligned}$$

und damit liegt nur eine der Nullstellen in $D(i;2)$. Mit der Cauchy'schen Integralformel sehen wir, dass

$$\int_{|z-i|=2} \frac{1}{(z^2+5)^2} dz = \int_{|z-i|=2} \frac{\frac{1}{(z+\sqrt{5}i)^2}}{(z-\sqrt{5}i)^2} = 2\pi i \frac{d}{dz}_{|_{z=\sqrt{5}i}} \frac{1}{(z+\sqrt{5}i)^2}.$$

Wir berechnen zunächst die Ableitung der gegebenen Funktion mit der Kettenregel. Man hat

$$\frac{d}{dz}_{|_{z=\sqrt{5}i}} \frac{1}{(z+\sqrt{5}i)^2} = \left(-\frac{2}{(z+\sqrt{5}i)^3}\right)_{|_{z=\sqrt{5}i}} = \frac{-2}{(2\sqrt{5}i)^3} = \frac{1}{4\sqrt{5}^3 i}.$$

Oben eingesetzt erhält man

$$\int_{|z-i|=3} \frac{1}{(z^2+5)^2} = 2\pi i \frac{1}{4\sqrt{5}^3 i} = \frac{\pi}{2\sqrt{125}}.$$

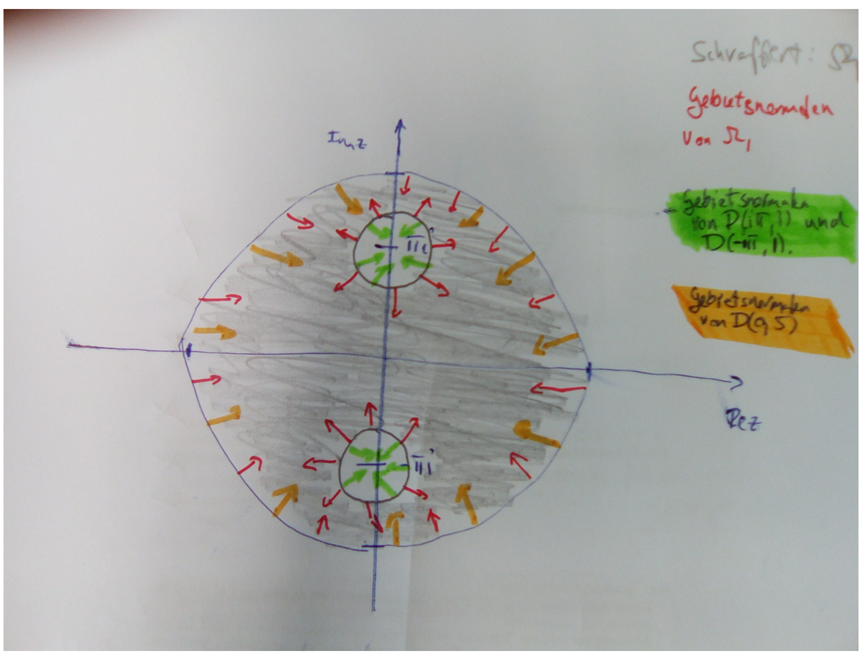
Aufgabe 6:(10 Punkte)
Berechne

$$\int_{|z|=5} \frac{e^z}{z^2+\pi^2} dz.$$

Lösungsvorschlag: Die Nullstellen des Nenners sind die Nullstellen von $z^2 + \pi^2$. Diese sind gegeben durch $z = \pm i\pi$ und der Nenner schreibt sich $z^2 + \pi^2 = (z - i\pi)(z + i\pi)$. Beide Nullstellen liegen in dem von der Kurve umschlossenen Gebiet $D(0,5)$. Definieren wir nun

$$\Omega_1 := D(0,5) \setminus (D(i\pi, 1) \cup D(-i\pi, 1)).$$

Die folgende Skizze der relevanten Gebiete mit ihren Normalen zeigt, dass wir das Integral mit den üblichen Techniken aufteilen können.



Konkret bedeutet das:

$$\begin{aligned}
\int_{|z|=5} \frac{e^z}{z^2+\pi^2} dz &= \int_{|z|=5} \frac{e^z}{(z-\pi i)(z+\pi i)} \\
&= \int_{\partial\Omega_1} \frac{e^z}{(z-\pi i)(z+\pi i)} dz \\
&\quad + \int_{|z-i\pi|=1} \frac{e^z}{(z-\pi i)(z+\pi i)} dz + \int_{|z+i\pi|=1} \frac{e^z}{(z-\pi i)(z+\pi i)} dz \\
&= 0 + \int_{|z-i\pi|=1} \frac{\frac{e^z}{z+i\pi}}{z-i\pi} + \int_{|z+i\pi|=1} \frac{\frac{e^z}{z-i\pi}}{z+i\pi} \\
&= 2\pi i \left(\frac{e^{i\pi}}{i\pi+i\pi} + \frac{e^{-i\pi}}{-i\pi-i\pi} \right) = 2\pi i \left(\frac{-1}{2\pi i} + \frac{-1}{-2\pi i} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Aufgabe 7: (5+10 = 15 Punkte)
a) Zeige, dass $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
Lösungsvorschlag: Wir benutzen Stetigkeit, Linearität und Multiplikativität des komplexen Konjugierens und erhalten:

$$\overline{\exp(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}} = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\left(\frac{z^k}{k!}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{z^k}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{z}^k}{k!} = \exp(\overline{z}).$$

b) Zeige, dass für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) z^k$$

Für welche $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$ gilt die Gleichung auch ?
Aus der Formelsammlung ist bekannt, dass für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gilt :

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k.$$

Leiten wir nun diese Gleichung ab. Da der Konvergenzradius der obenstehenden Potenzreihe offensichtlich 1 ist, darf sie für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ summandenweise abgeleitet werden. Für diese Zahlen z gilt also:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{d}{dz} \frac{1}{1-z} = \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) z^k,$$

was die Behauptung zeigt. Für $|z| > 1$ ist die Folge $((k+1)z^k)_{k \in \mathbb{N}}$ keine Nullfolge und deswegen divergiert die Reihe auf der rechten Seite der Gleichung. Die

Darstellung auf der linken Seite ergibt jedoch Sinn. Damit können die Ausdrücke in keinem erdenklichen Sinn übereinstimmen.

Aufgabe 8: (10 Punkte)
Bestimme alle $z \in \mathbb{C}$ sodass

$$f(z) = e^{z^7 (\sin z)^{16}} + \overline{z}^2$$

komplex differenzierbar ist.
Lösungsvorschlag: Ist f bei $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, so ist auch $g(z) := f(z) - e^{z^7 (\sin(z))^{16}} = \overline{z}^2$ bei z komplex differenzierbar, weil $e^{z^7 (\sin(z))^{16}}$ als Komposition holomorpher Funktionen holomorph auf $\mathbb{C}$ ist. Wir prüfen nun, wo $g(z) = \overline{z}^2$ komplex differenzierbar ist. Dazu:

$$g(x + iy) = (\overline{x + iy})^2 = (x - iy)^2 = x^2 + (iy)^2 - 2ixy = x^2 - y^2 - 2ixy.$$

Wir definieren daher $u(x, y) := x^2 - y^2$ und $v(x, y) := -2xy$. Prüfen wir die Cauchy Riemann-Gleichungen nach:

$$u_x = 2x, \quad v_y = -2x.$$

$$u_y = -2y \quad - v_x = 2y.$$

Damit gilt $u_x = v_y$ genau dann wenn $x = 0$ und $u_y = -v_x$ genau dann wenn $y = 0$. Da alle Ableitungen stetig auf $\mathbb{R}^2$ sind, sind die Cauchy-Riemann-Gleichungen nicht nur notwendig sondern auch hinreichend. Das heißt g ist nur bei $z = 0$ komplex differenzierbar und $f(z) = g(z) + e^{z^7 \sin(z)^{16}}$ ist damit auch nur bei $z = 0$ komplex differenzierbar.

Aufgabe 9:(10 Punkte)
Es sei $f(z)$ holomorph auf $\mathbb{C}$ sodass $f(z) \in \mathbb{R}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeige, dass f konstant ist.
Lösungsvorschlag: Wie im Satz über die Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen können wir $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wählen, sodass $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt. Nun ist nach Vorraussetzung $v(x, y) = \mathrm{Im}(f(x+iy)) = 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen implizieren:

$$u_x(x, y) = v_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} v(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} 0 = 0$$

und

$$u_y(x, y) = -v_x(x, y) = -\frac{\partial}{\partial x} v(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} 0 = 0.$$

Aufgabe 10:(10 Punkte)
Berechne
$$\int_{|z|=1} \sin(\overline{z})dz.$$

Lösungsvorschlag:
$$\begin{aligned}
\int_{|z|=1} \sin(\overline{z})dz &= \int_{|z|=1} \sin\left(\frac{|z|^2}{z}\right)dz \\
&= \int_{|z|=1} \sin\left(\frac{1}{z}\right)dz \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \sin\left(\frac{1}{e^{it}}\right) ie^{it}dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(e^{-it})ie^{it}dt \\
&\underset{s=-t}{\overset{Subst.}{=}} -\int_{\pi}^{-\pi} \sin(e^{is})ie^{-is}ds \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(e^{is})i\frac{e^{is}}{e^{2is}}ds \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(e^{is})\frac{ie^{is}}{(e^{is})^2}ds \\
&= \int_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{z^2}dz \\
&= 2\pi i \frac{d}{dz}_{|z=0} \sin(z) = 2\pi i\cos(0) = 2\pi i.
\end{aligned}$$

Aufgabe 11:(10 Punkte)
Wir betrachten den metrischen Raum $\mathbb{C}_\infty$ versehen mit dem chordalen Abstand
$$\chi_2(z_1, z_2) := \begin{cases} \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}} & z_1, z_2 \neq \infty \\ \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}} & z_2 = \infty, z_1 \neq \infty \\ \frac{1}{\sqrt{1+|z_2|^2}} & z_2 \neq \infty, z_1 = \infty \\ 0 & z_1 = z_2 = \infty \end{cases}.$$

Zeige, dass der so definierte metrische Raum kompakt ist, das heißt für jede Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}_\infty$ gibt es eine Teilfolge $(z_{l_n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $z \in \mathbb{C}_\infty$ sodass $\chi_2(z_{l_n}, z) \to 0$ für $n \to \infty$.
Lösungsvorschlag: Es sei $(z_n) \subset \mathbb{C}_\infty$. Wir unterscheiden zwei Fälle.
Fall 1: Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ sodass $(z_n)_{n\geq N}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{C}$ definiert. In diesem Fall hat die Folge $(z_n)_{n\geq N}$ nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine

konvergente Teilfolge im metrischen Raum $(\mathbb{C}, d)$, das heißt es gibt $(z_{l_n})_{n\geq N}$ und z in $\mathbb{C}$ sodass sodass $|z_{l_n} - z| \to 0$. Nummeriert man um, etwa mit $\widetilde{l_n} = l_{n+N}$ so erhält man eine Teilfolge von $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und es gilt nach wie vor $|z_{\widetilde{l_n}} - z| \to 0$. Man berechnet dann:

$$0 \leq \chi_2(z_{\widetilde{l_n}}, z) = \frac{|z_{\widetilde{l_n}} - z|}{\sqrt{1+|z_{\widetilde{l_n}}|^2}\sqrt{1+|z|^2}} \leq |z_{\widetilde{l_n}} - z| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Nach dem Sandwichsatz konvergiert $\chi_2(z_{\widetilde{l_n}}, z)$ gegen 0. Damit haben wir die konvergente Teilfolge.

Fall 2: Für jedes $N \in \mathbb{N}$ ist die Folge $(z_n)_{n\geq N}$ eine unbeschränkte Folge in $\mathbb{C}$ oder enthält ∞. Damit gilt: Für alle $N \in \mathbb{N}$ gibt es ein $\widetilde{M_N} \geq N$ sodass $|z_{\widetilde{M_N}}| > N$, wobei wir uns hier auf die Konvention $|\infty| = \infty$ einigen. Definiert man nun $M_N := \max_{1\leq i\leq N} \widetilde{M_i}$ so erhält man eine aufsteigende Liste natürlicher Zahlen. Da $M_N \geq N$ kann jede natürliche Zahl nur endlich oft in der Liste vorkommen. Insbesondere gilt $M_N \to \infty$ für $N \to \infty$. Damit enthält $(z_{M_N})_{N\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Es gilt aber auch

$$0 \leq \chi_2(z_{M_N}, \infty) = \begin{cases} 0 & z_{M_N} = \infty \\ \frac{1}{\sqrt{1+|z_{M_N}|^2}} & |z_{M_N}| \neq \infty \end{cases} \leq \frac{1}{\sqrt{1+N^2}} \to 0 \quad (N \to \infty).$$

Damit findet sich auch in diesem Fall eine konvergente Teilfolge. Die Behauptung ist damit gezeigt.