



## Übungen Variationsrechnung: Blatt 5

15. (Der Raum  $D^1(\mathbb{R}^n)$ , Sobolev-Einbettung und Rellich-Kondrachow-Resultate für unbeschränkte Gebiete)

(a) Definiere wie in der Vorlesung

$$D^1(\mathbb{R}^n) := \{f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \mid \nabla f \in L^2(\mathbb{R}^n), \forall \alpha > 0 : \lambda(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > \alpha\}) < \infty\} \quad (1)$$

Zeige  $W^{1,2}(\mathbb{R}^n) \subset D^1(\mathbb{R}^n)$  und finde eine Funktion in  $D^1(\mathbb{R}^n) \setminus W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ .

(b) BONUS: Es sei  $f \in D^1(\mathbb{R}^n)$  sodass  $\lambda(\{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| \geq t\}) \leq e^{-t}$ . Zeige, dass  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  für alle  $p \in (1, \infty)$

(c) Der Satz von Rellich Kondrachow (Satz 2.10) besagt, dass für  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt und  $C^1$ -glatt berandet und  $p \in [1, \infty)$  die Einbettung  $\iota : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$  kompakt ist. Zeige, dass die Einbettung  $\iota : W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$  nicht kompakt ist, d.h. finde eine beschränkte Folge in  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  die keine konvergente Teilfolge in  $L^p(\mathbb{R}^n)$  hat.

(d) Es sei  $n \geq 3$  und  $q \in [1, \infty)$  so dass  $\exists S > 0$  derart, dass für alle  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq S \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad (2)$$

Zeige, dass dann  $q = \frac{2n}{n-2}$  gilt. Zeige ferner, dass die Abschätzung auch für  $f \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$  gilt. Verwende hierfür  $W^{1,2}(\mathbb{R}^n) = W_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$  und beweise diese Behauptung, falls du sie noch nicht kennst.

**Bemerkung:** Das beweist dann Satz 6.1 zwar noch nicht, aber es erklärt, warum  $q = \frac{2n}{n-2}$  das einzige  $q \in [1, \infty)$  ist, für das wir die Aussage in Satz 6.1 erwarten können

(e) Lies dir das folgende Resultat durch, wir werden es in Aufgabe 16 (d) benutzen, aber der Beweis wird hier nur eine Bonusaufgabe sein. Es sei  $n \geq 3$  und  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$  derart dass  $f_k \rightharpoonup f$  in  $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ . Es sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  eine messbare Menge mit endlichem Lebesgue-Maß. Dann gilt  $f_k \rightarrow f$  in  $L^p(A)$  für jedes  $1 \leq p < \frac{2n}{n-2}$

(f) BONUS: Zeige zunächst (oder vergewissere dich, dass du es weißt): Für  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  sei  $\mathcal{F}(f) \in L^2(\mathbb{R}^n)$  die Fourier-Transformierte von  $f$ . Zeige

1. Falls  $g$  zusätzlich noch in  $L^1(\mathbb{R}^n)$  ist gilt  $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$

2. Es gilt  $\|\mathcal{F}(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ .

3. Falls  $f \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$  so gilt  $\mathbb{R}^n \ni k \mapsto |k|\mathcal{F}(f)(k) \in L^2(\mathbb{R}^n)$  und für  $j = 1, \dots, n$  gilt  $\mathcal{F}(\partial_j f) = 2\pi i k_j \mathcal{F}(f)$ .

(g) BONUS: Definiere für  $g \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$  und  $t > 0$  zunächst

$$g_t(x) := \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right) g(y) dy \quad (3)$$

Zeige, dass

$$|g_t(x)| \leq \|g\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\mathbb{R}^n)} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|y|^2 n}{4t}\right) dy \right)^{\frac{2}{n}} \quad (4)$$

(i) Zeige, dass  $\mathcal{F}(g_t)(k) = e^{-4\pi^2 |k|^2 t} \mathcal{F}(g)(k)$  und folgere, dass

$$\|g - g_t\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(f)(k)|^2 (1 - e^{-4\pi^2 |k|^2 t})^2 dk \quad (5)$$

(ii) Lies dir folgende Abschätzung durch und begründe jeden Schritt.

$$1 - \exp(-4\pi^2 |k|^2 t) \leq \min(1, 4\pi^2 |k|^2 t) \leq \min(1, 2\pi |k| \sqrt{t}) \leq 2\pi |k| \sqrt{t} \quad (6)$$

(iii) SchlieÙe, dass

$$\|g - g_t\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|\nabla g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \sqrt{t}. \quad (7)$$

- (h) BONUS: Sei nun  $f_n \rightharpoonup f$  in  $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ . Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  mit endlichem MaÙ. Zeige mit (3), dass für jedes  $t > 0$  gilt  $(f_n)_t \rightarrow f_t$  punktweise f.ü. Konstruiere mit (4) eine  $L^2(A)$  Majorante von  $(f_n)_t$  und folgere mit dem Satze von Lebesgue, dass  $(f_n)_t \rightarrow f_t$  in  $L^2(A)$ . SchlieÙe dann mit (7), dass  $f_n \rightarrow f$  in  $L^2(A)$ .

16. (Der Beweis von Lemma 6.3, Schwach-Stetigkeit der potenziellen Energie)

- (a) Es sei  $(\psi_k) \subset W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$  so dass  $\psi_k \rightharpoonup \psi$  in  $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ . Zeige dass auch  $(\psi_k)|_A \rightharpoonup \psi|_A$  in  $W^{1,2}(A)$  für jede offene Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}^n$ .
- (b) Es sei  $v \in L^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$  und  $(\psi_j) \subset W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$  derart, dass  $\psi_j \rightharpoonup \psi$  in  $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ . Zeige

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(x)|\psi_j(x)|^2 dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} v(x)|\psi(x)|^2 dx \quad (8)$$

- (c) Es sei  $(\psi_j)$  wie in Aufgabe(b) und  $w \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  derart, dass für alle  $\alpha > 0$  die Menge  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |w(x)| > \alpha\}$  beschränkt ist. Zeige, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} w(x)|\psi_j(x)|^2 dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} w(x)|\psi(x)|^2 dx \quad (9)$$

- (d) Sei nun  $w \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  derart, dass für alle  $\alpha > 0$  die Menge  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |w(x)| > \alpha\}$  endliches MaÙ hat. Zeige unter Verwendung von Aufgabe 15 e, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} w(x)|\psi_j(x)|^2 dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} w(x)|\psi(x)|^2 dx \quad (10)$$

- (e) Fasse deine Beobachtungen zusammen zu einem Beweis von Lemma 6.3.

17. (Nichtexistenz von Grundzuständen, Existenz angeregter Zustände )

Es sei  $V \in L^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n) + L^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Definiere wie in der Vorlesung

$$\mathcal{E}(\psi) := \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \psi|^2 + V(x)|\psi(x)|^2 \quad (11)$$

In Satz 6.4 haben wir gezeigt, dass

$$E_0 := \inf_{\psi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n), \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}=1} \mathcal{E}(\psi) < 0 \quad (12)$$

impliziert, dass es sein  $\psi_0 \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$  mit  $\|\psi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1$  gibt derart, dass  $\mathcal{E}(\psi_0) = E_0$  und  $\psi_0$  ist eine schwache Lösung der Schrödingergleichung, d.h

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla \psi_0 \nabla \phi + \int_{\mathbb{R}^n} V(x)\psi_0 \phi = E_0 \int_{\mathbb{R}^n} \psi_0 \phi \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (13)$$

Wie man sich mit den üblichen Techniken überlegen kann ist  $W^{1,2}(\mathbb{R}^n) = W_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$  und deswegen gilt auch

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla \psi_0 \nabla \phi + \int_{\mathbb{R}^n} V(x)\psi_0 \phi = E_0 \int_{\mathbb{R}^n} \psi_0 \phi \quad \forall \phi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n) \quad (14)$$

- (a) Nur für diese Teilaufgabe sei  $V \equiv 0$ . Zeige, dass dann

$$\inf_{\psi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n), \|\psi\|_{L^2}=1} \mathcal{E}(\psi) = 0 \quad (15)$$

Zeige auch: Es gibt kein  $\psi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$  mit  $\mathcal{E}(\psi) = 0$ .

- (b) Es seien die Voraussetzungen von Satz 6.4 erfüllt und  $\psi_0$  wie in Satz 6.4. Definiere

$$M_0^\perp := \left\{ \psi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n) \mid \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1, (\psi, \psi_0)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \psi \psi_0 dx = 0 \right\} \quad (16)$$

Zeige: Ist

$$E_1 := \inf_{\psi \in M_0^\perp} \mathcal{E}(\psi) < 0 \quad (17)$$

so existiert  $\psi_1 \in M_0^\perp$  so, dass

$$\mathcal{E}(\psi_1) = \inf_{\psi \in M_0^\perp} \mathcal{E}(\psi) = E_1 \quad (18)$$

- (c) Wir wollen im Folgenden zeigen, dass der Minimierer auch die Schrödinger-Gleichung

$$-\Delta\psi_1 + V\psi_1 = E_1\psi_1 \quad (19)$$

erfüllt. Sei zunächst  $\phi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$  derart, dass  $(\psi_0, \phi)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0$ . Dann gibt es  $\epsilon_0 > 0$  derart dass für  $|\epsilon| < \epsilon_0$

$$\psi_\epsilon := \frac{\psi_1 + \epsilon\phi}{\|\psi_1 + \epsilon\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}} \in M_0^\perp \quad (20)$$

Zeige, dass dann gilt

$$\int \nabla\psi_1 \nabla\phi + \int_{\mathbb{R}^n} V\psi_1\phi = E_1 \int \psi_1\phi. \quad (21)$$

- (d) Sei nun  $\phi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$  allgemein. Verwende orthogonale Projektionen in  $L^2(\mathbb{R}^n)$  um zu zeigen, dass

$$\int \nabla\psi_1 \nabla\phi + \int_{\mathbb{R}^n} V\psi_1\phi = E_1 \int \psi_1\phi \quad (22)$$

- (e) Im Sinne der Vorlesung müsste man jetzt definieren, dass  $\psi_1$  ein **erster angeregter Zustand** ist. Den Zusatz angeregt zu nennen macht aber physikalisch nur Sinn, wenn er ein höheres Energieniveau besitzt, d.h. wenn  $E_1 > E_0$  ist. Hierfür braucht man Eindeutigkeit des Minimierers (bis auf Vorzeichen). Diese werden wir nicht komplett zeigen, ein wichtiger Schritt ist aber die folgende Teilaufgabe:

- (f) Es sei  $\psi_0$  wie in Satz 6.4. Dann gilt entweder  $\psi_0^+$  oder  $\psi_0^-$  sind ungleich Null. O.b.d.A sei für diese Teilaufgabe  $\psi^+ \neq 0$ . Verwende die Schrödinger-Gleichung um zu zeigen, dass

$$\mathcal{E}\left(\frac{\psi_0^+}{\|\psi_0^+\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}}\right) = E_0 \quad (23)$$

und finde damit einen nichtnegativen Minimierer. Zeige, dass es kein weiteres Energieniveau  $E$  geben kann sodass die Schrödingergleichung  $-\Delta\psi + V\psi = E\psi$  eine nichtnegative schwache Lösung besitzt.

- (g) Wir wollen die Schrödingergleichung für das Wasserstoffatom explizit lösen. Dazu sei  $V(x) = -\frac{1}{|x|}$ . Wir probieren, eine Lösung von

$$-\Delta\psi - \frac{\psi}{|x|} = E_0\psi \quad (24)$$

zu finden in einem Funktionenraum, den wir zunächst nicht spezifizieren. Nehme zunächst an, dass die Lösung dieser Gleichung radial ist, d.h.  $\psi(x) = \psi(|x|)$ . Verwende Polarkoordinaten, um die Gleichung auf eine Differentialgleichung erster Ordnung zurückzuführen. Du erhältst eine nichtnegative Lösung. Verwende Aufgabe (f) um zu zeigen, dass es sich bei dieser Lösung um einen Grundzustand handeln muss.