Universität Ulm

Abgabe: Montag, 22.01.2017

Prof. Dr.Anna Dall'Acqua
Marius Müller
Wintersemester 2017/18
Punktzahl: keine

Übungen Variationsrechnung: Blatt 9

31. (Eine Pohozaev-Identität für eine Reaktions-Diffusions-Gleichung höherer Ordnung) Im Folgenden sei $n > 4$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein $C^{4,\alpha}$-glatt berandetes Gebiet für ein $\alpha > 0$. Wir betrachten klassische Lösungen der Gleichung

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \lambda u + |u|^{q-1}u & in\ \Omega \\ u = \frac{du}{d\nu} = 0 & auf \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

wobei $q = \frac{n+4}{n-4}$. Für diese Aufgabe verlangen wir, dass $u \in C^4(\overline{\Omega})$. Man kann aber zeigen, dass aufgrund der Glattheit des Randes des Gebiets, jede schwache Lösung $u \in W_0^{2,2}(\Omega)$ bereits $C^4(\overline{\Omega})$ sein muss. Unser Ziel ist der Beweis einer Pohozaev Identität, genauer wollen wir zeigen, dass

$$4\lambda \int_\Omega u^2 dx = \int_{\partial\Omega} (\Delta u)^2 (x \cdot \nu) dS. \tag{2}$$

(a) Es sei $v \in C^1(\overline{\Omega})$. Zeige, dass

$$\int_\Omega v(x \cdot \nabla v) dx = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} \langle x, \nu \rangle v^2 dx - \frac{n}{2} \int_\Omega v^2 dx \tag{3}$$

Hinweis: $v\nabla v = \nabla(\frac{v^2}{2})$.

(b) (i) Es sei $u \in C^1(\overline{\Omega})$ derart, dass $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Zeige:

$$\nabla u(x) = \nu(x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \quad \forall x \in \partial\Omega. \tag{4}$$

Hinweis: Ergänze $\{\nu(x)\}$ zu einer ONB von $\mathbb{R}^n$. Seien $e_1, ..., e_{i-1}$ die Vektroen, die dabei dazukommen. Diese sind, da orthogonal zur Normalen, im Tangentialraum von $\partial\Omega$, das heißt es gibt Kurven $c_i \in C^4((-\epsilon, \epsilon), \mathbb{R}^n)$ sodass $c_i((-\epsilon, \epsilon)) \subset \partial\Omega$, $c_i(0) = x$ und $c_i'(0) = e_i$.

(ii) Es sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$ derart, dass $u = \frac{du}{d\nu} = 0$.

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}(x) \quad \forall x \in \partial\Omega \tag{5}$$

Hinweis: Schreibe $\Delta u = Spur(Hess(u))$ und bilde die Spur in einer geeigneten ONB des $\mathbb{R}^n$.

(c) Es sei $u \in C^4(\overline{\Omega})$ derart, dass $u = \frac{\partial u}{\partial \mu} = 0$ Dann gilt

$$\int_\Omega \Delta^2 u(x \cdot \nabla u) dx = -\int_\Omega \nabla(\Delta u) \cdot \nabla(x \cdot \nabla u) dx \tag{6}$$

und

$$\int_\Omega \Delta^2 u(x \cdot \nabla u) dx = \int_\Omega (\Delta u)^2 - \sum_{k,i=1}^n \int_\Omega x_i (\Delta u)_{x_k} u_{x_i x_k} dx \tag{7}$$

(d) Sei u wie in Teilaufgabe (c). Zeige von von Teilaufgabe (c) ausgehend, dass

$$\sum_{k,i=1}^n \int_\Omega x_i (\Delta u)_{x_k} u_{x_i x_k} dx = \int_{\partial\Omega} (\Delta u)^2 \langle x, \nu \rangle dS - \int_\Omega (\Delta u)^2 - \int_\Omega \Delta u (x \cdot \nabla \Delta u) dx \tag{8}$$

(e) Zeige schließlich, dass fur u wie in (c)

$$\sum_{k,i=1}^n \int_\Omega x_i (\Delta u)_{x_k} u_{x_i x_k} dx = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (\Delta u)^2 \langle x, \nu \rangle dS + \frac{n-2}{2} \int_\Omega (\Delta u)^2 dx \tag{9}$$

(f) Folgere schlussendlich, dass für u wie in (c),

$$\int_\Omega \Delta^2 u(x\cdot\nabla u)dx = \frac{4-n}{2}\int_\Omega (\Delta u)^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} (\Delta u)^2 \langle x,\nu\rangle\, dS \tag{10}$$

(g) Vergewissere dich mit deinem Vorlesungsskript (Prop. 1.1 in §4.1.1), dass

$$\lambda\int_\Omega u(x\cdot\nabla u)dx = -\frac{\lambda n}{2}\int_\Omega u^2 dx \tag{11}$$

und

$$\int_\Omega |u|^{q-1}u(x\cdot\nabla u) = -\frac{n}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}dx \tag{12}$$

(h) Setze die Erkenntnisse aus (f) und (g) zusammen und erhalte

$$\frac{4-n}{2}\int_\Omega (\Delta u)^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (\Delta u)^2 (x\cdot\nu)dS = -\frac{\lambda n}{2}\int_\Omega u^2 dx - \frac{n}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}dx \tag{13}$$

(i) Verfahre wie im Beweis von Proposition 1.1 in §4.1.1 um die Pohozaev Identität in Gleichung (2) zu zeigen.

(j) Folgere: Es sei Ω zusätzlich strikt sternförmig, d.h. $x\cdot\nu > 0$ für alle $x\in\partial\Omega$. Zeige: Für $\lambda < 0$ besitzt (1) keine nichttriviale Lösung in $C^4(\overline{\Omega})$ (und damit auch keine schwache Lösung in $W_0^{2,2}(\Omega)$.

32. (Kritische Punkte kommen der Null nicht beliebig nahe)
Es sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, p^* der kritische Exponent, $\lambda < \lambda_1(\Omega)$, S die optimale Sobolev-Konstante aus Satz 1.3 und $\mathcal{E} : W_0^{1,2}(\Omega)\to\mathbb{R}$ gegeben durch

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1} \tag{14}$$

(a) Zeige: Jeder nichttriviale kritische Punkt $u\in W_0^{1,2}(\Omega)$ erfüllt

$$\int_\Omega |u|^{p^*+1}dx \geq \left(1-\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^{\frac{n}{2}} S^{\frac{n}{2}} \tag{15}$$

Hinweis: Meine Rechnung fängt so an: $0 = D\mathcal{E}(u)(u)$.

(b) Folgere, dass

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \geq \left(1-\frac{\lambda}{\lambda_1(\Omega)}\right)^{\frac{n-2}{2}} S^{\frac{n}{2}} \tag{16}$$

(c) Es sei nun $n\geq 4$ und $\lambda > 0$ oder $n = 3$ und $\lambda > \widetilde{\lambda}(\Omega)$ aus Lemma 1.5. Es sei dazu u ein nichttrivialer kritischer Punkt vom Mountain-Pass-Typ konstruiert wie in Lemma 1.4. Zeige:

$$\int_\Omega |u|^{p^*+1}dx \geq \frac{2n}{n-2}\left[\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^{\frac{n}{2}} - \frac{1}{n}\right] S^{\frac{n}{2}} \tag{17}$$

und folgere aus dieser Abschätzung eine neue Abschätzung für

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx. \tag{18}$$

Könntest du hier einen Iterationsprozess starten, um die Ungleichungen noch schärfer zu machen?
Hinweis: Verwende

$$\frac{1}{n}S^{\frac{n}{2}}\ \mathcal{E}(u) \geq \left(1-\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p^*+1}\int_\Omega u^{p^*+1}dx \tag{19}$$

und benutze (b).