1.3 Klassische Probleme der Variationsrechnung

1.3.1 Die Brachystochrone

Das Wort kommt aus dem Griechischen und heisst 'kürzeste Zeit'. 1696 stellte Johann Bernoulli folgendes Problem:

> Auf welcher der die Punkte A und B verbindenden Kurven gleitet ein Massepunkt unter Gravitationskraft und ohne Reibung am schnellsten von A nach B?

Das Problem würde dann gelöst von Jacob Bernoulli (seinem Bruder), Huygens, de L'Hospital, Leibniz und Newton.

Physikalische Herleitung des Modells

Seien $A = (x_1, y_1)$ und $B = (x_2, y_2)$ mit $x_2 > x_1$ und $y_1, y_2 > 0$. Wir parametrisieren die Kurve (die A und B verbindet) als $t \mapsto (x(t), y(t))^t$.

Die Energiegleichung ergibt, dass die Summe der potentiellen Energie und der kinetischen Energie gleich Null ist. Dann gilt punktweise

$$-mgy(t) + \frac{1}{2}m((v_1(t))^2 + (v_2(t))^2) = 0\,,$$

wobei m die Masse ist, g die Gravitationskonstante, und $\vec{v} = (v_1, v_2)^t$ ist die Geschwindigkeit. Aus diese Gleichung folgt die Relation

$$|\vec{v}(t)|^2 = 2gy(t)\,. \tag{1.1}$$

Wir machen nun die Annahme dass $x'(t) > 0$. Dann, mit Hilfe des Satzes der Inversen Funktion, konnen wir t als Funktion von x ausdrücken, d.h. $x \mapsto t(x)$ schreiben. Dann ist T (die Zeit von A nach B) gegeben durch

$$T = t(x_2) - t(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} t'(x)dx \text{ mit } t'(x) = \frac{1}{v_1(t(x))}\,,$$

da

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}(x(t), y(t))^t \text{ somit } x'(t) = v_1(t)\,.$$

Wir wollen nun $\frac{1}{v_1}$ als Funktion von x darstellen. Da der Parameter t als Funktion von x dargestellt werden kann, haben wir $y = y(t) = y(t(x)) =:$

$u(x)$, d.h. die Kurve kann parametrisiert werden als $x \mapsto (x, u(x))$ mit einer geeigneten Funktion u. Dann

$$v_2(t) = \frac{d}{dt} y(t) = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d}{dx} u(x) = v_1(t) u'(x) \, ,$$

und

$$|\vec{v}(t(x))| = \sqrt{(v_1(t(x)))^2 + (v_2(t(x)))^2} = \sqrt{1 + (u'(x))^2}\, v_1(t(x)) \quad (\text{da } v_1 > 0) \, .$$

Aus dieser Gleichung und (1.1) mit $y(t) = u(x)$ folgt

$$\frac{1}{v_1(t)} = \frac{\sqrt{1 + (u'(x))^2}}{|\vec{v}(t)|} = \frac{\sqrt{1 + (u'(x))^2}}{\sqrt{2gu(x)}} \, .$$

Zusammenfassend ist die Zeit T von A nach B gegeben durch

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + (u'(x))^2}{u(x)}} dx \, .$$

Problem. Seien $y_1, y_2 > 0$ und $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$. Existiert das Minimum über $u \in C^1((x_1, x_2)) \cap C^0([x_1, x_2])$ mit $u > 0$, $u(x_1) = y_1$ und $u(x_2) = y_2$ des Funktionals

$$J(u) := \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + (u'(x))^2}{u(x)}} dx \, ?$$

1.3.2 Rotationssymmetrische Minimalflächen

Betrachte zwei Punkte $P_1 = (x_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, z_2)$ in der x,z-Ebene mit $x_1 < x_2$ und $z_1, z_2 > 0$. Sei $u : [x_1, x_2] \to (0, \infty)$ eine beliebige glatte Funktion mit $u(x_1) = z_1$ und $u(x_2) = z_2$. Die Drehung bzgl. der x-Achse des Graphen der Funktion u erzeugt eine Rotationsfläche S. Eine Parametrisierung für diese Fläche $S(u)$ ist gegeben durch

$$(x_1, x_2) \times \mathbb{R} \ni (x, \varphi) \mapsto (x, u(x)\cos(\varphi), u(x)\sin(\varphi))^t =: F(x, \varphi) \, .$$

Beachte, dass diese Parametrisierung nur lokal injektiv ist. Der Flächeninhalt von $S(u)$ ist

$$J(u) = \int_0^{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} |u(x)| \sqrt{1 + (u'(x))^2} \, dx d\varphi = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} u(x) \sqrt{1 + u'(x)^2} \, dx \, ,$$