3.3 Sobolev Räume

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, offen.

Definition 3.3.1. *Sei $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ und $i \in \{1, \dots, n\}$. Wir sagen dass u **schwach differenzierbar in der i-ten Richtung** ist, falls es ein $v_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ gibt, so dass*

$$\int_\Omega u(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x)\, dx = -\int_\Omega v_i(x) \varphi(x)\, dx \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ gilt.}$$

Oft wird v_i mit $\frac{\partial}{\partial x_i} u = \partial_i u$ bezeichnet.

*Allgemeiner: Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex. Wir sagen, dass u die **schwache Ableitung** $D^\alpha u$ besitzt, falls es ein $v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ gibt so dass*

$$\int_\Omega u(x) D^\alpha \varphi(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v_\alpha(x) \varphi(x)\, dx \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ gilt.}$$

Hier $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

Bemerkung 3.3.2.
1. *Falls die (klassische) Ableitung existiert, dann stimmt sie mit der schwachen überein.*
2. *Die schwache Ableitung ist fast überall eindeutig. Diese Bemerkung folgt aus dem Hauptlemma der Variationsrechnung für L^1-Funktionen.*

Beispiel 1: Sei $n = 1$ und $\Omega = (0, 2)$. Betrachte die Funktionen

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{für } 1 < x \leq 2, \end{cases} \quad \text{und } v(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{für } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Beh. v ist die schwache Ableitung von u.
Begr. Sei $\varphi \in C_0^\infty(0, 2)$. Dann:

$$\begin{aligned} \int_0^2 u(x) \varphi'(x)\, dx &= \int_0^1 x \varphi'(x)\, dx + \int_1^2 \varphi'(x)\, dx \\ &= x\varphi(x)|_0^1 - \int_0^1 \varphi(x)\, dx + \varphi(x)|_1^2 - 0 \\ &= \varphi(1) - \int_0^1 \varphi(x)\, dx - \varphi(1) = -\int_0^2 v(x) \varphi(x)\, dx\,. \end{aligned}$$

Beispiel 2: Sei $n = 1$ und $\Omega = (0,2)$. Betrachte die Funktionen

$$u(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{für } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Beh. u besitzt keine schwache Ableitung.
Begr. Angenommen es existiert $v \in L^1_{\text{loc}}(0,2)$ mit

$$\int_0^2 u(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_0^2 v(x)\varphi(x)\,dx \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(0,2)\,.$$

Dann gilt für alle $\varphi \in C_0^\infty(0,2)$

$$\begin{aligned} -\int_0^2 v(x)\varphi(x)\,dx &= \int_0^2 u(x)\varphi'(x)\,dx \\ &= -\int_0^1 \varphi'(x)\,dx + \int_1^2 \varphi'(x)\,dx \\ &= -(\varphi(1) - \varphi(0)) + \varphi(2) - \varphi(1) = -2\varphi(1)\,. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Sei nun $\tilde{\varphi} \in C_0^\infty(1,2)$ und betrachte

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ \tilde{\varphi}(x) & \text{für } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Dann $\varphi \in C_0^\infty(0,2)$ und aus (3.2) folgt

$$\int_1^2 v(x)\tilde{\varphi}(x)\,dx = 0 \text{ für alle } \tilde{\varphi} \in C_0^\infty(1,2)\,.$$

Aus dem Hauptlemma der Variationsrechnung für Funktionen in L^1_{loc} folgt, dass $v = 0$ f.ü. in $[1,2]$. Analog kann man zeigen, dass $v = 0$ f.ü. in $[0,1]$. Somit folgt aus (3.2)

$$2\varphi(1) = \int_0^2 v(x)\varphi(x)\,dx = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(0,2)\,.$$

Widerspruch!

Definition 3.3.3. *Sei $1 \leq p < \infty$ und $m \in \mathbb{N}$. Der Raum*

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R};\ u \in L^p(\Omega),\ \textit{so dass } D^\alpha u \textit{ existiert im schwachen Sinne}$$
$$\textit{für alle } \alpha \in \mathbb{N}_0^n \textit{ mit } |\alpha| \leq m \textit{ und } D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}\,,$$

*ist der **Sobolev-Raum** der m-mal schwach differenzierbaren Funktionen die zur Potenz p integrierbar sind. Die Norm in $W^{m,p}$ is definiert durch*

$$\|u\|_{W^{m,p}} := \left(\sum_{0 \le |\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Satz 3.3.4. *Sei $1 < p < \infty$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

1. *$W^{m,p}(\Omega)$ ist ein Banachraum;*
2. *$C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ ist dicht in $W^{m,p}(\Omega)$ bzgl. der $W^{m,p}$-Norm. D.h. für alle $u \in W^{m,p}(\Omega)$ existiert eine Folge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$, so dass*
$$\|u_k - u\|_{W^{m,p}} \longrightarrow 0 \text{ für } k \to \infty.$$

Beispiele (1) Die Funktion

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \le x \le 1, \\ 1 & \text{für } 1 < x \le 2, \end{cases}$$

ist Element von $W^{1,p}(0,2)$ für alle $p \in [1, \infty)$.

(2) Die Funktion $u(x) = |x|$ ist Element von $W^{1,p}(-1,1)$ für alle $p \in [1, \infty)$.

Satz 3.3.5 (Einbettungssatz in Dimension 1, siehe [BGH], Thm.2.2)**.** *Sei $I = (a,b)$ mit $|I| < \infty$ und $m \in (1, \infty)$. Dann gilt $W^{1,m}(I) \subset C^0(\overline{I})$. D.h. für jedes $u \in W^{1,m}(I)$ gibt es einen stetigen Repräsentanten in der Äquivalenklasse von u.*

Zusätzlich gilt für alle $x_0, x_1 \in [a,b]$

$$u(x_1) - u(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} u'(y)\, dy \quad \text{und}$$
$$\sup_I |u(x)| \le \frac{1}{|I|} \int_I |u(t)|\, dt + \int_I |u'(t)|\, dt\,.$$

Satz 3.3.6 (Poincaré Ungleichung)**.** *Sei $p \in (1, \infty)$, $I = (a,b)$, $x_0 \in [a,b]$ und $u \in W^{1,p}(I)$. Dann gilt*

$$\int_a^b |u(x) - u(x_0)|^p\, dx \le (b-a)^p \int_a^b |u'(x)|^p\, dx\,.$$

Insbesondere,

$$\int_a^b |u(x) - \overline{u}_I|^p \, dx \le (b-a)^p \int_a^b |u'(x)|^p \, dx \,,$$

wobei $\overline{u}_I = \frac{1}{|I|}\int_I u(x)\,dx$.

Beweis. Nach Satz 3.3.5 gilt

$$u(x) - u(x_0) = \int_{x_0}^x u'(y)\,dy \text{ und somit } |u(x)-u(x_0)|^p \le \left(\int_I |u'(y)|\,dy\right)^p \,.$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_a^b |u(x)-u(x_0)|^p \, dx &\le |b-a| \left(\int_a^b |u'(y)|\,dy\right)^p \\ &\qquad \text{(Hölder-Ungleichung mit } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1) \\ &\le |b-a| \left(\int_a^b |u'(y)|^p \,dy\right) (|b-a|)^{\frac{p}{p'}} \\ &= |b-a|^p \int_a^b |u'(y)|^p \,dy \,.\end{aligned}$$

Die zweite Aussage folgt aus der ersten mit dem Mittelwertsatz. □

Satz 3.3.7. *Sei* $I = (a,b)$, $1 < p < \infty$, *und* $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset W^{1,p}(I)$ *mit* $\|u_k\|_{W^{1,p}} \le C$. *Dann existiert eine Teilfolge* u_{k_j} *und eine Funktion* $u \in W^{1,p}(I)$ *mit*

$$\begin{gathered} u_{k_j} \rightharpoonup u \text{ in } W^{1,p}(I) \\ \text{d.h. } u_{k_j} \rightharpoonup u \text{ in } L^p(I) \text{ und } u'_{k_j} \rightharpoonup u' \text{ in } L^p(I)\,. \end{gathered}$$

Beweis. Aus $\|u_k\|_{W^{1,p}} \le C$ folgt $\|u_k\|_{L^p} \le C$. Satz 3.1.6(2) impliziert, dass eine Teilfolge $(u_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ und $u \in L^p(\Omega)$ existieren mit

$$u_{k_j} \rightharpoonup u \text{ in } L^p(I)\,.$$

Ebenso, aus $\|u_k\|_{W^{1,p}} \le C$ folgt $\|u'_{k_j}\|_{L^p} \le C$. Satz 3.1.6(2) impliziert, dass eine Teilfolge $(u'_{k_{j_m}})_{m\in\mathbb{N}}$ und $v \in L^p(\Omega)$ existieren mit

$$u'_{k_{j_m}} \rightharpoonup v \text{ in } L^p(I)\,.$$

Zu zeigen: $u' = v$ im schwachen Sinne.
Wir haben für alle $\varphi \in C_0^\infty(I)$

$$\begin{aligned}\int_I u(x)\varphi'(x)\ dx &= \lim_{m\to\infty}\int_I u_{k_{j_m}}(x)\varphi'(x)\ dx \\ &= -\lim_{m\to\infty}\int_I u'_{k_{j_m}}(x)\varphi(x)\ dx = -\int_I v(x)\varphi(x)\ dx\,.\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt. $\square$