Universität Ulm

Abgabe: Dienstag, 13.06.2017

Prof. Dr. Friedmar Schulz
Marius Müller
Sommersemester 2017
Punktzahl: 21

# Übungen Elemente der Funktionentheorie: Blatt 2

In diesem Übungsblatt geht es um die wunderliche Geometrie, die uns die Riemann-Sphäre gibt. Wir wollen untersuchen, wie sich bestimmte Operationen in $\mathbb{C}_\infty$ in Operationen in der Riemann-Sphäre übersetzen und den chordalen Abstand besser verstehen. Einige Identitäten aus dem Skript werden dabei benötigt! Für dieses Blatt definieren wir - wie in der Vorlesung -

$$S := \left\{ (\xi, \eta, \mu) \in \mathbb{R}^3 : \xi^2 + \eta^2 + \left(\mu - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \right\}.$$

Wir betrachten auch die folgende Abbildung $\phi : S \to \mathbb{C}_\infty$, die einen Punkt auf $S$ zu der Zahl in $\mathbb{C}_\infty$ schickt, mit der Sie im Sinne von Abschnitt 1.4.2. identifiziert wird. Wir betrachten ferner die metrischen Räume $(S, \chi_1)$ und $(\mathbb{C}_\infty, \chi_2)$, wobei $\chi_1, \chi_2$ den chordalen Abstand bezeichne. Hierzu möchte ich drei Definitionen in Erinnerung rufen:
1)Eine Folge $(x_n) \subset M$ in einem metrischen Raum $(M, d)$ heißt konvergent, falls es ein $x \in M$ gibt, sodass $d(x_n, x) \to 0$ für $n \to \infty$. Dann heißt auch $x$ der Grenzwert
2) Sei $(M, d)$ ein metrischer Raum und $K \subset M$. Dann heißt $K$ kompakt, wenn jede Folge $(x_n) \subset K$ eine konvergente Teilfolge $(x_{l_n})$ mit Grenzwert in K besitzt.
3) Sei $(M, d)$ ein metrischer Raum. $A \subset M$ heißt abgeschlossen, falls für jede konvergente Folge $(x_n) \subset A$ der Grenzwert $x$ wieder in $A$ liegt
Im Metrischen Raum $(\mathbb{C}, d)$ haben wir die kompakten Mengen als alle abgeschlossenen und beschränkten Mengen identifiziert. In allgemeinen metrischen Räumen lassen sich kompakte Mengen nicht so einfach charakterisieren. Dieses Blatt soll helfen, die kompakten Mengen in $(S, \chi_1)$ und $(\mathbb{C}_\infty, \chi_2)$ zu verstehen.

**10.** NEU: Diese Aufgabe ist keine Bonusaufgabe im klassischen Sinne, sondern sollte eher als Hinweis-Aufgabe dienen, die bei der Bearbeitung der Folgenden Blätter ziemlich gut helfen kann. Ihr könnt sie für 5 Punkte abgeben. (5*)

(a) Es sei $(\xi, \eta, \mu) \in S$. Zeige, dass
$$\phi(\xi, \eta, \mu) = \frac{\xi + i\eta}{1 - \mu}$$

(b) Zeige damit
$$|\phi(\xi, \eta, \mu)|^2 = \frac{\mu}{1 - \mu}$$

**11.** Skizziere die folgenden Mengen und gebe eine möglichst einfache Beschreibung. (4)

- $D(\infty; \frac{1}{2}) := \{z \in \mathbb{C}_\infty | \chi_2(\infty, z) < \frac{1}{2}\}$ in $\mathbb{C}_\infty$ .
- $\{z \in \mathbb{C}_\infty : \chi_2(z, \infty) \leq \frac{1}{2}\} \cup \infty$ in $\mathbb{C}_\infty$ .
- $\phi^{-1}(D(\infty; \frac{1}{2}))$ in $S$.
- $\phi^{-1}(\mathbb{R}_\infty)$ in $S$, wobei $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Hinweis: Benutze Aufgabe 10 NEU, um die Urbilder von $\phi$ zu charakterisieren.

**12.** Es sei $A \subset C_\infty$ und $\infty \notin A$. Zeige: $A$ ist abgeschlossen in $(\mathbb{C}_\infty, \chi_2)$ genau dann wenn $A$ kompakt in $(\mathbb{C}, d)$ ist, wobei $d$ die kanonische (euklidische) Metrik auf $\mathbb{C}$ ist. (2)

HINWEIS: Für die Richtung $\Rightarrow$ zeige, dass $A$ abgeschlossen und beschränkt sein muss. Zunächst Beschränktheit: Wäre $A$ unbeschränkt so fände man einfe Folge $(z_n) \subset A$ sodass $\chi_2(z_n, \infty) \to 0$. Dann Abgeschlossenheit: Sei $z$ ein Häufungspunkt von $A$. Damit finden wir jetzt aber eine Folge $(z_n)$ sodass $|z_n - z| = 0$. Folgere daraus dass $\chi_2(z_n, z) \to 0$ und dann ist $z \in A$.

**13.** Zeige, dass $\mathbb{R}_\infty$ kompakt in $\mathbb{C}_\infty$ liegt, d.h für jede Folge $(x_n) \subset \mathbb{R}_\infty$ gibt es eine Teilfolge $(x_{l_n})$ und ein $x \in \mathbb{R}_\infty$ sodass $\chi_2(x_{l_n}, x) \to 0$ für $n \to \infty$. (2)

HINWEIS: Wähle eine beliebige Folge $(x_n) \subset \mathbb{R}_\infty$ und unterscheide zwei Fälle: Der erste Fall ist, dass die Folge beschränkt und reell ist. Um eine konvergente Teilfolge zu bekommen kann man den Satz von Bolzano Weierstarss benutzen. Der zweite Fall ist, dass die Folge unbeschränkt ist. Dann behaupte ich, es gibt eine Teilfolge, sodass $\chi_2(x_{l_n}, \infty) \to 0$

**14.** Zeige: Für jeden Punkt $(\xi, \eta, \mu) \in S$ gibt es genau ein $\psi \in (-\pi, \pi]$ sodass (2)

$$(\xi, \eta, \mu) = (\sqrt{\mu(1-\mu)}\cos\psi, \sqrt{\mu(1-\mu)}\sin\psi, \mu).$$

Die Koordinaten $(\mu, \psi)$ nennt man sphärische Polarkoordinaten. Beweise auch, dass $\psi = \arg(\phi(\xi, \eta, \mu))$.

HINWEIS: Zur Existenz: Gegeben $(\xi, \eta, \mu) \in S$ können wir $(\xi, \eta) = (r\cos\psi, r\sin\psi)$ in Polarkoodinaten schreiben. Die Kreisgleichung von $S$ gibt uns Auskunft über $r$. Zur Formel mit dem argument, vergegenwärtige dir nochmal, dass $\phi(\xi, \eta, \mu) = \frac{\xi + i\eta}{1-\mu}$

**15.** (a) Wir definieren für eine Matrix $M := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ die sogenannte Möbiustransformation $T_M : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ durch (2*)

$$T_M(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & cz+d \neq 0 \\ \infty & cz+d = 0 \\ \frac{a}{c} & z = \infty \end{cases},$$

wobei wir hier temporär die Konvention $\frac{a}{c} = \infty$, wenn $c = 0$ treffen. Zeige: Für $M, N \in GL_n(\mathbb{C})$ gilt $T_{MN} = T_M \circ T_N$. Ferner ist $T_M$ stets invertierbar und $T_M^{-1} = T_{M^{-1}}$ .

(b) Zeige: Jede Möbiustransformation $T_M$ lässt sich als Verkettung der folgenden Abbildungen schreiben (3)

- Drehung um einen Winkel $\theta$: $D_\theta(z) = e^{i\theta}z$, wobei wir hier dazu $D_\theta(\infty) = \infty$ setzen .
- Streckung um einen konstanten Faktor $\alpha > 0$: $S_\alpha(z) = \alpha z$, und wieder setzen wir stillschweigend $S_\alpha(\infty) = \infty$ .
- Verschiebung um $c \in \mathbb{C}$: $V_c(z) = z + c$, der unendlich ferne Punkt wird wieder auf sich selbst verschoben.
- Inversion $I(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & z \neq 0 \\ \infty & z = 0 \\ 0 & z = \infty \end{cases}$ .

Zu welchen Matrizen korrespondieren die einzelnen Abbildungen ?

(c) Ist $T_M$ eine Möbiustransformation, so ist $\phi^{-1} \circ T_M \circ \phi$ eine Abbildung von $S$ nach $S$. Beschreibe $\phi^{-1} \circ D_\theta \circ \phi$, $\phi^{-1} \circ S_\alpha \circ \phi$ und $\phi^{-1} \circ I \circ \phi$ geometrisch und gib ihre Abbildungsvorschrift wahlweise in den Koordinaten $(\xi, \eta, \mu)$ oder in den sphärischen Polarkoordinaten $(\psi, \mu)$ an. (4)

(d) Gib zwei Möbiustransformationen $T_{M_1}$ und $T_{M_2}$ an, sodass $\phi^{-1} \circ T_{M_i} \circ \phi$ den Großkreis $\mu = \frac{1}{4}$ auf den Großkreis $\mu = \frac{3}{4}$ abbildet. Außerdem soll $T_{M_1} \circ T_{M_2}^{-1}$ keine Drehung sein. (2)

**16.** Es sei $(M, d)$ ein metrischer Raum. Zeige, dass die Vereinigung endlich vieler kompakter Mengen wieder kompakt ist. Wenn $K_1, ..., K_N$ kompakt sind und $K = \bigcup_i K_i$ ist. Ist $(x_n)$ eine Folge in $K$ so muss es einen Index $i$ geben sodass unendlich viele Folgeglieder (und damit eine ganze Teilfolge ) in $K_i$ liegen. (WARUM ? ) (2)

**17.** Es seien $K_1, K_2, ... \subset \mathbb{C}$ kompakt und nichtleer, sodass $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset ...$ . Zeige (2)

$$K := \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$$

ist kompakt und nichtleer.

Die folgende Frage gibt auf diesem Blatt noch keine Punkte aber wird auf dem nächsten Blatt eine Übungsaufgabe sein.

**18.** Gegeben sei die folgende Funktionenfolge

$$f_N(z) = \sum_{n=3}^{N} \frac{(-1)^n}{n+z} \tag{1}$$

Zeige, dass die Funktionenfolge gleichmäßig auf $D := \{z \in \mathbb{C} | 1 < |z| < 2\}$ konvergiert. Ist der Weierstraß-M-Test anwendbar ?

Einen schönen Feiertag!