



Übungen Elemente der Funktionentheorie: Blatt 3

Wir haben diese Woche einige unglaublich wichtige Konzepte kennen gelernt: Da wären Reihen und ihr Konvergenzverhalten, Potenzreihen und die komplexe Exponentialfunktion sowie der komplexe Logarithmus. Ein weiteres wichtiges Tool ist der Satz von Arzela-Ascoli, den wir später noch benötigen werden.

19. (a) Entscheide, ob folgende Logarithmusausdrücke definiert sind und berechne sie, falls definiert : (2)
 $\log i, \log(-1), \log(-1 - \sqrt{3}i)$
- (b) Finde alle Zahlen $i^{i \log i}$. Wie viele gibt es ? (1)
- (c) Wir definieren für diese Aufgabe: $\sqrt{w} = \exp(\frac{1}{2} \log w)$ für $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$. Zeige, dass für den Hauptzweig des Logarithmus gilt $\sqrt{w} = z_w$, wobei z_w die Zahl, die in Aufgabe 10 Blatt 1 definiert wurde, ist. (2)
Hinweis: Zeige $|\sqrt{w}| = |z_w|$ und $\arg \sqrt{w} = \arg z_w$. Um $\arg(z_w)$ zu bestimmen kann vielleicht helfen dass $\arg(w + |w|) = \frac{\arg w}{2}$. Um das zu sehen kann helfen dass $1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$ und $\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$.
- (d) Zeige: $\overline{\sqrt{z}} = \sqrt{\bar{z}}$. (2)
Hinweis: Benutze $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$ und $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$, aber beides nicht unbegründet!
- (e) Finde eine Potenzreihendarstellung für $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) := \frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ und zeige, dass sie auf dem gesamten Definitionsbereich konvergiert. Macht diese Potenzreihe auch für $z \in \mathbb{R}_{\leq 0}$ Sinn ? (2)
Hinweis: In der Vorlesung hatten wir eine Potenzreihendarstellung vom Sinus, vielleicht kann man ja damit arbeiten.
- (f) Zeige $\sin(x + iy) = \sin(x) \cosh(y) + i \sinh(y) \cos(x)$. Folgere, dass $\sin(x + iy) = 0$ dann und nur dann wenn $x + iy = k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Finde alle komplexen Nullstellen von $\sinh : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. (3)
- (g) Beweise für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ (2)

$$\cos^n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos((n-2k)x).$$

Hinweis: Zunächst binomischer Lehrsatz. Danach noch ausnutzen dass die linke Seite auf jeden Fall reell ist!

20. Es sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und (f_n) eine Folge von komplexwertigen stetigen Funktionen definiert auf K , die gleichmäßig gegen eine stetige Funktion f konvergiert. Zeige, dass (f_n) gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig ist. (4)
21. (a) BONUS: Es sei $(x_n) \subset \mathbb{C}$ eine Zahlenfolge. Zeige $x_n \rightarrow x$ in (\mathbb{C}, d) genau dann wenn jede Teilfolge eine Teilfolge besitzt, die gegen x konvergiert. Gebe ein Beispiel für eine divergente Folge, bei der jede Teilfolge eine konvergente Teilfolge hat. (3*)
Hinweis: Für die Rückrichtung nehme ich einen Widerspruchsbeweis: Angenommen x_n konvergiert nicht gegen x . Dann gibt es ein $\epsilon_0 > 0$ sodass es zu jedem $N \in \mathbb{N}$ ein $n_N \geq N$ gibt sodass $|x_{n_N} - x| \geq \epsilon_0$. Aus den x_{n_N} 's lässt sich sicher eine Teilfolge machen. Kann die noch eine Teilfolge haben, die gegen x konvergiert ?
- (b) BONUS: Es sei (f_n) eine gleichmäßig beschränkte und gleichgradig stetige Folge von Funktionen, die punktweise gegen f konvergiert. Zeige, dass f_n gleichmäßig gegen f konvergiert. (3*)
Hinweis: Ich mache einen Widerspruch und setze erst ähnlich an wie oben. Im Laufe des Beweises nutze ich natürlich Arzela-Ascoli.

22. Gegeben sei die folgende Funktionenfolge (5)

$$f_N(z) = \sum_{n=3}^N \frac{(-1)^n}{n+z}.$$

Zeige, dass die Funktionenfolge gleichmäßig auf $D := \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$ konvergiert. Ist der Weierstraß-M-Test auf die Funktionenreihe

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+z}$$

anwendbar?

Hinweis: Ich benutze das Cauchy-Kriterium. Aber wie macht man da weiter? Als Hinweis hier vielleicht mal folgende Rechnung:

$$\left| \sum_{n=800}^{3001} \frac{(-1)^n}{n+z} \right| = \left| \sum_{n=400}^{1500} \left(\frac{1}{2n+z} - \frac{1}{2n+1+z} \right) \right| = \left| \sum_{n=400}^{1500} \frac{1}{(2n+z)(2n+1+z)} \right| \leq \sum_{n=400}^{1500} \frac{1}{(2n-2)(2n-1)} < \frac{1}{800-1}$$

wobei ich hier einmal die Summe aufgeteilt in gerade und ungerade Summanden aufgeteilt habe und einmal sowohl die Dreiecksungleichung als auch die inverse Dreiecksungleichung verwendet hab. Der geübte Leser hat bestimmt erkannt, dass ich sowas nur machen kann wenn Anfangsindex gerade und Endindex ungerade ist. Aber wenn dem nicht so ist, kann man vielleicht ein bisschen basteln.