Elemente der Funktionentheorie, Probeklausur

Erlaubte Hilfsmittel: keine (im Anhang befindet sich eine kleine Formelsammlung)
Es sind **120 Punkte** erreichbar, jedoch zählen 100 Punkte als 100 Prozent. Bitte auf jedem Blatt nur eine Aufgabe bearbeiten und dokumentenechte Stifte verwenden. Falls zwei undurchgestrichene Lösungen für dieselbe Aufgabe abgegeben werden, so wird die schlechtere gewertet. Daher bitte alle Rechenwege bis auf einen sauber durchstreichen. Antworten sind stets zu begründen. Das Angabenblatt darf nach Abgabe der Klausur mit nach Hause genommen werden. Bitte nichts, was in die Wertung eingehen soll, auf das Angabenblatt schreiben!
VIEL ERFOLG!

Aufgabe 1:(10 Punkte)
Beweise für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\cos^3(z) = \frac{\cos(3z) + 3\cos(z)}{4}.$$

Lösungsvorschlag:

$$\begin{aligned}
\cos^3(z) &= \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(e^{iz} + e{-}iz)^3 \\
&= \frac{1}{8}((e^{iz})^3 + 3(e^{iz})^2 e^{-iz} + 3e^{iz}(e^{-iz})^2 + (e^{-iz})^3)) \\
&= \frac{1}{8}(e^{3iz} + 3e^{iz} + 3e^{-iz} + e^{-3iz}) \\
&= \frac{1}{8}(e^{3iz} + e^{-3iz} + 3(e^{iz} + e^{-iz})) \\
&= \frac{1}{8}(2\cos(3z) + 6\cos(z)) = \frac{\cos(3z) + 3\cos(z)}{4}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2:(10 Punkte)
Zeige: Für $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ gilt

$$\sum_{j=0}^{k-1} \sin\left(j\frac{2\pi}{k}\right) = 0.$$

Lösungsvorschlag:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k-1} \sin\left(\frac{2\pi j}{k}\right) &= \sum_{j=0}^{k-1} \operatorname{Im}\left(e^{\frac{2\pi i j}{k}}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\sum_{j=0}^{k-1} e^{\frac{2\pi i j}{k}}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\sum_{j=0}^{k-1} \left(e^{\frac{2\pi i}{k}}\right)^j\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\frac{1-\left(e^{\frac{2\pi i}{k}}\right)^k}{1-e^{\frac{2\pi i}{k}}}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\frac{1-1}{1-e^{\frac{2\pi i}{k}}}\right) = 0
\end{aligned}$$

Aufgabe 3:(10 Punkte)
Bestimme alle Zweige des Logarithmus von $1+i$ und skizziere mindestens drei von ihnen in der komplexen Zahlenebene.
Lösungsvorschlag:

$$\log(1+i) = \log|1+i| + i\arg(1+i) + 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Nun gilt

$$|1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

und

$$\arg(1+i) = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Alles in allem hat man

$$\log(1+i) = \log(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4} + 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Für den Plot besuche man `http://www.wolframalpha.com/input/?i=Plot+%7B+(+log+(sqrt(2)+)+,+pi%2F4)+,+(+log(+sqrt(2)),+9+pi+%2F4+)+,++(+log(sqrt(2)),+-7+pi%2F4)+%7D`

Aufgabe 4: (10 Punkte)
Berechne

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z^3(z^2+5)} dz.$$

Lösungsvorschlag:

$$\begin{aligned}
\int_{|z|=1} \frac{1}{z^3(z^2+5)}dz &= \int_{|z|=1} \frac{\frac{1}{z^2+5}}{z^3}dz \\
&= \frac{2\pi i}{2!} \frac{d^2}{dz^2}_{|z=0} \frac{1}{z^2+5} \\
&= \pi i \frac{d}{dz}_{|z=0} \frac{-2z}{(z^2+5)^2} \\
&= \pi i \left(\frac{-2}{(z^2+5)^2} + \frac{8z^2}{(z^2+5)^3} \right)_{|z=0} = \frac{-2\pi i}{25}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 5: (10 Punkte)
Zeige

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{\overline{z}} = 0.$$

Lösungsvorschlag:

$$\begin{aligned}
\int_{|z|=1} \frac{e^z}{\overline{z}} &= \int_{|z|=1} \frac{ze^z}{\overline{z}z} \\
&= \int_{|z|=1} \frac{ze^z}{|z|^2} = \int_{|z|=1} ze^z = 0
\end{aligned}$$

nach dem Cauchy'schen Integralsatz, da $f(z) = ze^z$ auf $\mathbb{C}$ holomorph ist.

Aufgabe 6: (10 Punkte)
Berechne

$$\int_{|z|=7} \frac{\sin(z)}{z^2-5z+4}dz.$$

Lösungsvorschlag: Es bezeichne $\Omega_1 := D(0,7) \setminus (D(4,1) \cup D(1,1))$. Wir berechnen zunächst die Nullstellen von $P(z) = z^2-5z+4$. Mit der $p-q-$Formel ergibt sich $z_1 = 1$ und $z_2 = 4$

$$\begin{aligned}
\int_{|z|=7} \frac{\sin(z)}{z^2-5z+4}dz &= \int_{|z|=7} \frac{\sin(z)}{(z-4)(z-1)} \\
&= \int_{\partial\Omega_1} \frac{\sin(z)}{(z-4)(z-1)}dz + \int_{|z-4|=1} \frac{\sin(z)}{(z-4)(z-1)}dz \\
&\quad + \int_{|z-1|=1} \frac{\sin(z)}{(z-4)(z-1)}dz
\end{aligned}$$

Nun verschindet das Integral über $\partial\Omega_1$ weil der Integrand auf Ω_1 holomorph und auf dem Abschluss stetig ist. Wir berechnen im Folgenden die verbleibenden Integrale

$$\begin{aligned}
\int_{|z-4|=1} \frac{\sin(z)}{(z-4)(z-1)} dz &= \int_{|z-4|=1} \frac{\frac{\sin(z)}{z-1}}{z-4} dz = 2\pi i \frac{\sin(4)}{4-1} = \frac{2\pi i}{3} \sin(4) \\
\int_{|z-1|=1} \frac{\sin(z)}{(z-4)(z-1)} dz &= \int_{|z-1|=1} \frac{\frac{\sin(z)}{z-4}}{z-1} dz = 2\pi i \frac{\sin(1)}{1-4} = -\frac{2\pi i}{3} \sin(1)
\end{aligned}$$

Und damit gilt

$$\int_{|z|=7} \frac{\sin(z)}{z^2-5z+4} dz = \frac{2\pi i}{3}(\sin(4) - sin(1))$$

Aufgabe 7:(10+10 = 20 Punkte)

a) Zeige, dass $-i\sinh(iz) = \sin(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Lösungsvorschlag

$$-i\sinh(iz) = -i\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}\right) = \frac{1}{i}\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin(z).$$

b) Bestimme eine Potenzreihe, deren Einschränkung auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit der Funktion

$$f(z) := \frac{\sinh(z)}{z} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

zusammenfällt. Besitzt f eine analytische Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$?[Keine Begründung, nur Ja oder Nein.] Wenn Ja, bestimme die Ableitung dieser Fortsetzung im Punkte $z = 0$.

Lösungsvorschlag: Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt

$$\frac{\sinh(z)}{z} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k}$$

Diese Reihe ist eine Potenzreihe, die in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ konvergiert. Da nun aber der Konvergenzbereich einer jeden Potenzreihe stets ganz $\mathbb{C}$, ein einzelner Punkt oder eine Kreisscheibe mit Radius $R > 0$ ist, muss die Reihe bereits auf ganz $\mathbb{C}$ konvergieren. Damit ist

$$P(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k}$$

sicherlich eine analytische Fortsetzung von f auf ganz $\mathbb{C}$. Insbesondere besitzt f eine. Nun hat man, nach der Differentiationsregel für Potenzreihen,

$$P'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{(2k+1)!} z^{2k-1}.$$

Wertet man diesen Ausdruck bei 0 aus, so findet man $P'(0) = 0$.

Aufgabe 8:(10 Punkte)
Bestimme alle $z \in \mathbb{C}$ sodass

$$f(z) = \overline{z}e^{-z}$$

bei z komplex differenzierbar ist.
Lösungsvorschlag: Ist $f(z)$ bei $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, so ist insbesondere auch $e^z f(z) = \overline{z}$ bei z_0 differenzierbar, wegen der Produktregel. Ein solches z_0 existiert jedoch nicht, denn $g(z) = \overline{z}$ erfüllt die Cauchy-Riemann DGL'n nirgends. Wenn man die Übungsaufgabe dazu gemacht hat kann man gerne auf diese verweisen. Wenn nicht, dann schreibt man $g(x+iy) = x-iy$ und setzt $u(x,y) = x$ und $v(x,y) = -y$. Nun sieht man, dass $u_x \equiv 1$ und $v_y \equiv -1$ und damit beide niemals übereinstimmen.

Aufgabe 9: (10 Punkte)
Zeige, dass die folgende Funktionenreihe gleichmäßig auf dem Ringgebiet $D := \{z \in \mathbb{C} | 1 < |z| < 2\}$ konvergiert:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 + z^2}.$$

Lösungsvorschlag: Wir wenden den Weierstraß-M-Test an: Für $z \in D$ und $n \geq 3$ gilt

$$\left| \frac{1}{n^2 + z^2} \right| = \frac{1}{|n^2 + z^2|} \leq \frac{1}{||n^2| - |z^2||} = \frac{1}{n^2 - |z|^2} \leq \frac{1}{n^2 - 4}$$

Die Reihe

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4}$$

konvergiert nun aber und daher konvergier nach dem Weierstraß-M-Test

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 + z^2}$$

gleichmäßig.

Aufgabe 10: (10 Punkte) [Achtung, Einserbremse]
Berechne

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{\sin^2(z)} dz.$$

Lösungsvorschlag: Man stelle zunächst dar für $z \in \mathbb{C}$

$$\sin^2(z) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \right)^2 = z^2 \left(\sum_{k_0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k} \right)$$

Definieren wir nun für alle z aus dem Konvergenzbereich der Reihe

$$P(z) := \left(\sum_{k_0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k} \right)^2 .$$

Nun gilt: $P(z)$ ist definiert auf $\mathbb{C}$ denn auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt $P(z) = \frac{\sin^2(z)}{z^2}$, aber $P(z)$ ist auch durch das Quadrat einer Potenzreihe gegeben, die damit auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ konvergieren muss. Nun konvergieren aber Potenzreihen stets in einem Kreisgebiet, also entweder auf ganz $\mathbb{C}$, auf Punkten oder auf Kreisen mit Radius $R > 0$. Damit muss die gegebene Potenzreihe sogar schon auf ganz $\mathbb{C}$ konvergieren und es gilt

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{\sin^2(z)} dz = \int_{|z|=1} \frac{1}{z^2 P(z)} dz$$

Nun hat $P(z)$ dieselben Nullstellen wie der Sinus außer die Null und damit hat $P(z)$ keine Nullstellen in $D(0,1)$. Nun gilt also nach der Cauchy Integralformel

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2 P(z)} dz = 2\pi i \frac{d}{dz}_{|z=0} \frac{1}{P(z)} = - \frac{2}{\left(\sum_{k_0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k} \right)^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k-1} = 0.$$

Daraus schließen wir

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{\sin^2(z)} dz = 0$$

Aufgabe 11:(5+5=10 Punkte)
Wir betrachten den metrischen Raum $\mathbb{C}_\infty$ versehen mit dem chordalen Abstand

$$\chi_2(z_1, z_2) := \begin{cases} \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}} & z_1, z_2 \neq \infty \\ \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}} & z_2 = \infty, z_1 \neq \infty \\ \frac{1}{\sqrt{1+|z_2|^2}} & z_2 \neq \infty, z_1 = \infty \\ 0 & z_1 = z_2 = \infty \end{cases}$$

Es kann ohne Beweis vorausgesetzt werden, dass χ_2 tatsächlich eine Metrik definiert

a) Es sei nun $(w_n) \subset \mathbb{C}$ und $w \in \mathbb{C}$ so, dass $|w_n - w| \to 0$ Zeige: $\chi_2(w_n, w) \to 0$ für $n \to \infty$.

Lösungsvorschlag:

$$0 \leq \chi_2(w_n, w) = \frac{|w_n - w|}{\sqrt{1 + |w_n|^2}\sqrt{1 + |w|^2}} \leq |w_n - w| \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{1}$$

Damit geht nach dem Sandwichsatz aus der Analysis auch $\chi_2(w_n, w)$ gegen Null.
b) Zeige, dass eine beschränkte Folge $(w_n) \subset \mathbb{C}$ keine Teilfolge (w_{l_n}) haben kann, sodass $\chi_2(w_{l_n}, \infty) \to 0$ für $n \to \infty$.

Lösungsvorschlag: Wähle ein $L > 0$ sodass $|w_n| \leq L$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Insbesondere gilt

$$\chi_2(w_n, \infty) \geq \frac{1}{\sqrt{1 + L^2}} \tag{2}$$

Würde nun $\chi_2(w_{l_n}, \infty)$ gegen Null konvergieren, so wäre

$$0 = \lim_{n \to \infty} \chi_2(w_{l_n}, \infty) \geq \frac{1}{\sqrt{1 + L^2}} \tag{3}$$

Ein Widerspruch.

Formelsammlung

- Cauchy'sche Integralformel (für Ableitungen). Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet für das gewisse Vorraussetzungen gelten, die hier nie überprüft werden müssen. Dazu sei f holomorph auf Ω und stetig auf $\overline{\Omega}$. Dann gilt:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \tag{4}$$

- Diverse Identitäten für Funktionen:

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad (z \in \mathbb{C}) \tag{5}$$

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \quad (z \in \mathbb{C}) \tag{6}$$

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \quad (z \in \mathbb{C}) \tag{7}$$

$$\sinh(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1} \quad (z \in \mathbb{C}) \tag{8}$$

$$\cosh(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k} \quad (z \in \mathbb{C}) \tag{9}$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad (z \in \mathbb{C}, |z| < 1) \tag{10}$$

- Identitäten für Summen:

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z} \quad (z \in \mathbb{C}, z \neq 1, n \in \mathbb{N}) \tag{11}$$

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}) \tag{12}$$

- Cauchy-Riemann Differenzialgleichungen: Es sei f auf einer offenen Mengee $D \subset \mathbb{C}$ gegeben und $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$. Definiere $u(x,y) := Ref(x+iy)$ und $v(x,y) := Imf(x+iy)$. Ist f bei z_0 komplex differenzierbar so gilt bei (x_0, y_0)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{13}$$

  Sind die oben genannten Ableitungen auf D stetig und erfüllen die Differenzialgleichungen bei (x_0, y_0), so kann auch gefolgert werden, dass f bei z_0 komplex differenzierbar ist.

- Wir definieren den komplexen Logarithmus wie folgt. Mit der Konvention $-\pi < \arg(z) \leq \pi$ setzen wir (mengenwertig)

$$\log(z) = \log|z| + i\arg(z) + 2\pi i n \quad (n \in \mathbb{Z}) \tag{14}$$

  Den Zweig des Logarithmus, der sich für $n = 0$ ergibt nennen wir Hauptzweig des Logarithmus (und dieser definiert damit tatsächlich eine Funktion)

- Die n - ten Einheitswurzeln: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $z^n = 1$ wird gelöst von

$$z_j = e^{\frac{2j\pi i}{n}} \quad j = 0, ..., n-1. \tag{15}$$