Universität Ulm
Abgabe: Dienstag, 11.07.2017

Prof. Dr. Friedmar Schulz
Marius Müller
Sommersemester 2017
Punktzahl: 24

Übungen Elemente der Funktionentheorie: Blatt 5

26. Berechne die nachstehenden Kurvenintegrale. Falls der Cauchysche Integralsatz oder die Cauchysche Integralformel benutzt wird, muss nicht gezeigt werden, dass die Regularitätsvorrautssetzung ($f = u + iv$ und u, v im Reellen stetig differenzierbar) erfüllt ist (sie folgt ja nach der Bemerkung zum Cauchyschen Integralsatz sowieso aus der Holomorphie).

(a) (1)

$$\int_{|z-3|=5} e^{z^5 \sin z} dz$$

(b) (1)

$$\int_{|z|=1} \frac{z^3 e^z}{z-\frac{1}{2}} dz$$

(c) (2)

$$\int_{\gamma} \frac{z^3 e^z}{z-\frac{1}{2}} dz$$

wobei γ im mathematisch positiven Sinne den Rand einer Ellipse parametrisiert, die $\frac{1}{2}$ als inneren Punkt enthält.

(d) (2)

$$\int_{|z|=1} \frac{z^3 e^z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} dz$$

(e) (2)

$$\int_{|z-1|=3} \frac{\sin(z^4+1)}{(z-7)^{42}} dz$$

(f) (2)

$$\int_{|z|=\frac{5}{2}} \frac{1}{z^2-5z+6} dz$$

(g) (2)

$$\int_{|z|=4} \frac{1}{z^2-5z+6} dz$$

(2)

(h)

$$\int_{|z|=3} \frac{e^z}{(z-1)(z-2)} dz$$

(i) (2)

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{\frac{1}{2}\overline{z}-1} dz$$

(j) (2)

$$\int_{|z|=1} \frac{\overline{z}}{z-\frac{1}{2}} dz$$

(k) (1)

$$\int_{|z|=1} \log(z) dz$$

wobei wir in dieser Aufgabe den Hauptzweig des Logartihmus meinen, für den wir folgende Konvention treffen: $-\pi \le \arg(z) \le \pi$ und $\log(z) = \log|z| + i\arg(z)$.

(l) (2)

$$\int_{\gamma_0} \frac{1}{(1+z^2)\exp(z)} dz$$

wobei γ_0 eine Parametrisierung einer Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ ist, die im (!) Uhrzeigersinn durchlaufen wird

(m) (2)

$$\int_{|z|=1} \exp\left(\frac{1}{z}\right) dz$$

(n) (2)

$$\int_{|z-1-i|=2} \frac{z^7+1}{z^2(z^2+1)} dz$$

27. (a) Wahr oder Falsch? Es sei Ω wie in der Vorlesung, sodass der Satz von Gauß-Green anwendbar ist. Sei auch $z_0 \in \Omega$ ein innerer Punkt. Falls $f = u + iv$ holomorph auf $\Omega \setminus \{z_0\}$ ist und u und v im Reellen gesehen stetig differenzierbar auf $\overline{\Omega}$, so gilt (2)

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Hinweis: Die Aussage ist wahr: Schau dir nochmal den Beweis der Cauchy Integralformel an und untersuche jeden Schritt auf seine Richtigkeit. Alternativ: Nimm zur Kenntnis, dass $g(z) := (z - z_0)f(z)$ Holomorph auf Ω und stetig auf $\overline{\Omega}$ ist und verwende die Cauchy Integralformel für g.

(b) Berechne (2)

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{\exp(z) - 1} dz$$

Hinweis: Definiere für $z \in \overline{D(0;1)}$

$$f(z) := \begin{cases} \frac{z}{\exp(z)-1} & z \neq 0 \\ ??? & z = 0 \end{cases}$$

und zwar so, dass f auf $\overline{D(0;1)}$ stetig ist. Beobachte dann, dass es sich bei dem obenstehenden Integral um

$$\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z} dz$$

handelt. Verwende nun Aufgabenteil a)

Aufgabe 28 zeigt, wie man Funktionentheorie benutzen kann um reelle Integrale zu bestimmen. Sie kann am 11.07.2017 oder gemeinsam mit Blatt 6 (=der Probeklausur) abgegeben werden.

28. (a) Es sei für $R > 2$ γ_R die Kurve, die zuerst eine gerade Stecke von $-R + 0i$ nach $R + 0i$ durchläuft, und dann auf einem Halbkreis oberhalb der x- Achse zurückläuft. Zeige, dass für $n \in \mathbb{N}$, n gerade,$n \geq 2$ gilt (3)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^n} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^n} dz$$

(b) Gebe eine Familie von geschlossenen(!) Kurven γ_R an, sodass (3)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{1+x^n} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{-iz}}{1+z^n} dz.$$

(c) Berechne (2)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx$$

(d) Wende eine ähnliche Technik an, um (2)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$$

zu bestimmen.

Übungsblätter sowie aktuelle Informationen unter
https://www.uni-ulm.de/mawi/analysis/lehre/veranstaltungen/sose2017/elemente-der-funktionentheorie/