Prof. Dr. Friedmar Schulz
Marius Müller
Sommersemester 2017
Punktzahl: 24

Lösungsvorschlag Elemente der Funktionentheorie: Blatt 5

26. Berechne die nachstehenden Kurvenintegrale. Falls der Cauchysche Integralsatz oder die Cauchysche Integralformel benutzt wird, muss nicht gezeigt werden, dass die Regularitätsvorrautssetzung ($f = u + iv$ und u, v im Reellen stetig differenzierbar) erfüllt ist (sie folgt ja nach der Bemerkung zum Cauchyschen Integralsatz sowieso aus der Holomorphie).

(a) (1)

$$\int_{|z-3|=5} e^{z^5 \sin z} dz$$

(b) (1)

$$\int_{|z|=1} \frac{z^3 e^z}{z - \frac{1}{2}} dz$$

(c) (2)

$$\int_{\gamma} \frac{z^3 e^z}{z - \frac{1}{2}} dz$$

wobei γ im mathematisch positiven Sinne den Rand einer Ellipse parametrisiert, die $\frac{1}{2}$ als inneren Punkt enthält.

(d) (2)

$$\int_{|z|=1} \frac{z^3 e^z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2} dz$$

(e) (2)

$$\int_{|z-1|=3} \frac{\sin(z^4 + 1)}{(z-7)^{42}} dz$$

(f) (2)

$$\int_{|z|=\frac{5}{2}} \frac{1}{z^2 - 5z + 6} dz$$

(g) (2)

$$\int_{|z|=4} \frac{1}{z^2 - 5z + 6} dz$$

(2)

(h)

$$\int_{|z|=3} \frac{e^z}{(z-1)(z-2)} dz$$

(i) (2)

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{\frac{1}{2}\overline{z} - 1} dz$$

(j) (2)

$$\int_{|z|=1} \frac{\overline{z}}{z - \frac{1}{2}} dz$$

(k) (1)

$$\int_{|z|=1} \log(z) dz$$

wobei wir in dieser Aufgabe den Hauptzweig des Logartihmus meinen, für den wir folgende Konvention treffen: $-\pi \leq \arg(z) \leq \pi$ und $\log(z) = \log|z| + i \arg(z)$.

(l) (2)

$$\int_{\gamma_0} \frac{1}{(1+z^2)\exp(z)} dz$$

wobei γ_0 eine Parametrisierung einer Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ ist, die im (!) Uhrzeigersinn durchlaufen wird.

Lösungsvorschlag: Es sei γ_1 die Ellipse mit derselben Gleichung gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen. Dann hat man:

$$\int_{\gamma_0} \frac{1}{(1+z^2)\exp(z)} dz = \int_{\gamma_1} \frac{1}{(1+z^2)\exp(z)} dz.$$

Nun schreiben wir $(1+z^2) = (z-i)(z+i)$ und erhalten:

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{(1+z^2)\exp(z)} = \int_{\gamma_1} \frac{e^{-z}}{(z-i)(z+i)} dz. \tag{1}$$

Dann definieren wir E als das Innere der oberen Ellipse und $\Omega_1 := E \backslash (D(i, 0.01) \cap D(-i, 0.01))$. Durch eine einfache Zeichung (siehe Übung) macht man sich klar

$$\int_{\gamma_1} \frac{e^{-z}}{(z-i)(z+i)} dz = \int_{\partial\Omega_1} \frac{e^{-z}}{(z-i)(z+i)} + \int_{|z-i|=0.01} \frac{e^{-z}}{(z-i)(z+i)} + \int_{|z+i|=0.01} \frac{e^{-z}}{(z-i)(z+i)} \tag{2}$$

Das erste Integral ist 0 nach dem Cauchy Integralsatz, das zweite ergibt $2\pi i \frac{e^i}{i+i}$ und das dritte ist $2\pi i \frac{e^{-i}}{-i-i}$. Damit hat man

$$\int_{\gamma_0} \frac{1}{(1+z^2)\exp(z)} dz = -2\pi i \frac{e^i}{2i} - 2\pi i \frac{e^{-i}}{-2i} = -2\pi i \sin(1). \tag{3}$$

(m) (2)

$$\int_{|z|=1} \exp\left(\frac{1}{z}\right) dz$$

(n) (2)

$$\int_{|z-1-i|=2} \frac{z^7+1}{z^2(z^2+1)} dz$$

27. (a) Wahr oder Falsch? Es sei Ω wie in der Vorlesung, sodass der Satz von Gauß-Green anwendbar ist. Sei auch $z_0 \in \Omega$ ein innerer Punkt. Falls $f = u + iv$ holomorph auf $\Omega \setminus \{z_0\}$ ist und u und v im Reellen gesehen stetig differenzierbar auf $\overline{\Omega}$, so gilt (2)

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Hinweis: Die Aussage ist wahr: Schau dir nochmal den Beweis der Cauchy Integralformel an und untersuche jeden Schritt auf seine Richtigkeit. Alternativ: Nimm zur Kenntnis, dass $g(z) := (z - z_0)f(z)$ Holomorph auf Ω und stetig auf $\overline{\Omega}$ ist und verwende die Cauchy Integralformel für g.

(b) Berechne (2)

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{\exp(z) - 1} dz$$

Hinweis: Definiere für $z \in \overline{D(0;1)}$

$$f(z) := \begin{cases} \frac{z}{\exp(z)-1} & z \neq 0 \\ ??? & z = 0 \end{cases}$$

und zwar so, dass f auf $\overline{D(0;1)}$ stetig ist. Beobachte dann, dass es sich bei dem obenstehenden Integral um

$$\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z} dz$$

handelt. Verwende nun Aufgabenteil a)

Lösungsvorschlag: Definiere für $z \in \overline{D(0,1)}$

$$f(z) := \begin{cases} \frac{z}{\exp(z)-1} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Dann ist f stetig auf $\overline{D(0,1)}$. Bei jedem Punkt außer 0 ist das klar und für 0 betrachten wir

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\exp(z)-1} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{\frac{\exp(z)-1}{z-0}} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{\frac{\exp(z)-\exp(0)}{z-0}} = \frac{1}{\exp'(0)} = 1 = f(0)$$

Nun gilt nach Aufgabe 27a)

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{\exp(z)-1} dz = \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i. \tag{5}$$

Aufgabe 28 zeigt, wie man Funktionentheorie benutzen kann um reelle Integrale zu bestimmen. Sie kann am 11.07.2017 oder gemeinsam mit Blatt 6 (=der Probeklausur) abgegeben werden.

28. (a) Es sei für $R > 2$ γ_R die Kurve, die zuerst eine gerade Stecke von $-R+0i$ nach $R+0i$ durchläuft, und dann auf einem Halbkreis oberhalb der x- Achse zurückläuft. Zeige, dass für $n \in \mathbb{N}$, n gerade,$n \geq 2$ gilt (3)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^n} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^n} dz$$

Lösungsvorschlag: Schreibe

$$\gamma_R = \gamma_R^1 \oplus \gamma_R^2 \tag{6}$$

wobei

$$\gamma_R^1(t) = t \quad (t \in [-R, R]) \tag{7}$$

und

$$\gamma_R^2(t) = Re^{it} \quad (t \in [0, \pi]) \tag{8}$$

Nun berechnen wir

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^n} dz = \int_{\gamma_R^1} \frac{e^{iz}}{1+z^n} dz + \int_{\gamma_R^2} \frac{e^{iz}}{1+z^n} dz. \tag{9}$$

Beim ersten Integral setzen wir die Parametrisierung ein und erhalten

$$\int_{\gamma_R^1} \frac{e^{iz}}{1+z^n} dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{it}}{1+t^n} dt. \tag{10}$$

Beim zweiten Integral benutzen wir die Standardabschätzung

$$\left| \int_{\gamma_R^2} \frac{e^{iz}}{1+z^n} \right| \leq L(\gamma_R^2) \sup_{|z|=R, Im(z)\geq 0} \frac{e^{iz}}{1+z^n} \tag{11}$$

Nun gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = R$ und $Im(z) \geq 0$:

$$|e^{iz}| = e^{Re(iz)} = e^{-Im(z)} \leq 1 \tag{12}$$

und mit der inversen Dreiecksungleichung

$$\left| \frac{1}{1+z^n} \right| = \frac{1}{|1+z^n|} \leq \frac{1}{|z|^n - 1} = \frac{1}{R^n - 1} \tag{13}$$

Die Länge von γ_2^R ist die Hälfte des Umfangs eines Kreises mit Radius R also πR. Somit bekommen wir

$$\left| \int_{\gamma_R^2} \frac{e^{iz}}{1+z^n} \right| \leq \pi R \frac{1}{R^n - 1} \tag{14}$$

was für $R \to \infty$ gegen Null konvergiert. Damit gilt

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^n} dz = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R^1} \frac{e^{iz}}{1+z^n} dz = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{it}}{1+t^n} dt. \tag{15}$$

Da nun $\frac{e^{it}}{1+t^n}$ auf der reellen Achse uneigentlich integrierbar ist, identifizieren wir den oberen Limes als

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it}}{1+t^n} dt \tag{16}$$

Eine Variablenumbennung führt auf die Behauptung.

(b) Gebe eine Familie von geschlossenen(!) Kurven γ_R an, sodass (3)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{1+x^n} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{-iz}}{1+z^n} dz.$$

Lösungsvorschlag: Hier muss man unterhalb der x-Achse zurücklaufen, das heißt

$$\gamma_R = \gamma_R^1 \oplus \gamma_R^2 \tag{17}$$

wobei

$$\gamma_R^1(t) = t \quad (t \in [-R, R]) \tag{18}$$

und

$$\gamma_R^2(t) = Re^{-it} \quad (t \in [0, \pi]). \tag{19}$$

(c) Berechne (2)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx$$

Lösungsvorschlag: Wir berechnen das Integral über γ_R für $R > 1$ und gehen zum Grenzwert für $R \to \infty$ über. Schreiben wir zunächst $1 + z^2 = (z - i)(z + i)$. Zeichnet man sich einen Plan, bemerkt man, dass das beschränkte Gebiet, was von γ_R umschlossen wird, i enthält, nicht jedoch $-i$. Also gilt mit der Cauchy Integralformel

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = \int_{\gamma_R} \frac{\frac{e^{iz}}{z+i}}{z-i} dz = 2\pi i \frac{e^{i\cdot i}}{i+i} = 2\pi i \frac{e^{-1}}{2i} = \pi e^{-1}. \tag{20}$$

Da obige Gleichung unabhängig von R ist, gilt

$$\pi e^{-1} = \lim_{R\to\infty} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx \tag{21}$$

(d) Wende eine ähnliche Technik an, um (2)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$$

zu bestimmen.

Lösungsvorschlag: Definieren wir $\gamma_R = \gamma_R^1 \oplus \gamma_R^2$ wie in Teilaufgabe (a). Wir müssen wiederum zeigen, dass $\int_{\gamma_R^2} \frac{1}{1+z^4} dz$ gegen Null geht für R gegen unendlich. Wir haben wieder die Standardabschätzung:

$$\left| \int_{\gamma_R^2} \frac{1}{1+z^4} dz \right| =\leq \pi R \sup_{|z|=R} \frac{1}{|1+z^4|} \leq \pi R \frac{1}{R^4 - 1} \to 0 \quad (R \to \infty). \tag{22}$$

wobei wiederum die inverse Dreiecksungleichung benutzt wurde. Das heißt wir können wieder folgern, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^4} dz \tag{23}$$

Nun hat kann man mithilfe der Formel für komplexe Wurzeln alle Lösung von $z^4 = -1$ bestimmen und erhält $1 + z^4 = (z - e^{i\frac{\pi}{4}})(z - e^{\frac{3\pi i}{4}})(z - e^{\frac{5\pi i}{4}})(z - e^{\frac{7\pi i}{4}})$. Nun sind $e^{i\frac{\pi}{4}}$ und $e^{\frac{3\pi i}{4}}$ oberhalb der x-Achse und mit dem üblichen Trick für mehrere Polstellen erhält man für $R > 1$:

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^4} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{\frac{3\pi i}{4}})(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{\frac{5\pi i}{4}})(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{\frac{7\pi i}{4}})} + \frac{1}{(e^{i\frac{3\pi}{4}} - e^{\frac{\pi i}{4}})(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{\frac{5\pi i}{4}})(e^{i\frac{\pi}{4}} - -e^{\frac{7\pi i}{4}})} \right). \tag{24}$$

Das kann man jetzt noch vereinfachen, muss man aber nicht.