Infoblatt: Der Weierstraßsche M-Test (English Version below)

Satz: Es sei $D \subset \mathbb{C}$. Für $n \in \mathbb{N}$, $u_n : D \to \mathbb{C}$ seien Funktionen derart, dass es $M_n > 0$ gibt mit $|u_n(z)| \leq M_n \ \forall z \in D \forall n \in \mathbb{N}$ und

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n \tag{1}$$

konvergiert. Dann konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) \tag{2}$$

gleichmäßig.

Beweis: Wir zeigen dass die Reihe das Cauchy-Kriterium erfüllt. Es sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $N_0 \in \mathbb{N}$ sodass für alle$N \geq N_0$ und alle $P \geq 0$

$$\left|\sum_{n=N}^{N+P} M_n\right| < \epsilon \tag{3}$$

Nun betrachte für $z \in D$ $N \geq N_0$ und $P > 0$

$$\left|\sum_{n=N}^{N+P} u_n(z)\right| \leq \sum_{n=N}^{N+P} |u_n(z)| \leq \sum_{n=N}^{N+P} M_n < \epsilon \tag{4}$$

Womit gezeigt wäre: Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $N_0 \in \mathbb{N}$ sodass für $N \geq N_0$ und $P \geq 0$

$$\sup_{z \in D} \left|\sum_{n=N}^{N+P} u_n(z)\right| < \epsilon \tag{5}$$

Das ist gerade das Cauchy-Kriterium.

ENGLISH VERSION

Theorem Let $D \subset \mathbb{C}$ be a set and $u_n : D \to \mathbb{C}$ be such that for each $n \in \mathbb{N}$ there is $M_n > 0$ such that $|u_n(z)| \leq M_n$ for all $z \in D$ and

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$$

converges. Then the series of functions

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) \tag{6}$$

converges uniformly in D.

Proof: We show that the series satisfies the Cauchy-Criterion. Let $\epsilon > 0$. Then there has to be an $N_0 \in \mathbb{N}$ such that for each $N \geq N_0$ and each $P \geq 0$

$$\left| \sum_{n=N}^{N+P} M_n \right| < \epsilon \tag{7}$$

For $z \in D$, $N \geq N_0$ and $P > 0$ note that

$$\left| \sum_{n=N}^{N+P} u_n(z) \right| \leq \sum_{n=N}^{N+P} |u_n(z)| \leq \sum_{n=N}^{N+P} M_n < \epsilon \tag{8}$$

Which implies: For each $\epsilon > 0$ there exists an $N_0 \in \mathbb{N}$ such that for $N \geq N_0$ and $P \geq 0$

$$\sup_{z \in D} \left| \sum_{n=N}^{N+P} u_n(z) \right| < \epsilon \tag{9}$$

This however verifies the Cauchy criterion for series.