Übungen zu Partielle Differenzialgleichungen

Blatt: 10

Abgabetermin: Montag, 10.1.2011 in der Vorlesung

1. Sei H ein Prä-Hilbertraum. Beweise die folgenden Aussagen. [4]

   (a) Falls x, y orthogonal aufeinander stehen, gilt $\|x\|_H^2 + \|y\|_H^2 = \|x+y\|_H^2$.

   (b) Allgemeiner $2\|x\|_H^2 + 2\|y\|_H^2 = \|x+y\|_H^2 + \|x-y\|_H^2$ für alle $x, y \in H$.

   (c) Ferner gilt für alle $x, y \in H$

   $$\begin{aligned} 4(x|y)_H &= \|x+y\|_H^2 - \|x-y\|_H^2 && \text{falls } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \text{ und} \\ 4(x|y)_H &= \|x+y\|_H^2 + i\|x+iy\|_H^2 - \|x-y\|_H^2 - i\|x-iy\|_H^2 && \text{falls } \mathbb{K} = \mathbb{C}. \end{aligned}$$

   (d) Ist A eine Teilmenge von H, dann ist $A \subset (A^\perp)^\perp$.

   (e) Das orthogonale Komplement $H^\perp$ ist $\{0\}$.

2. Zeige, dass die Familie von Funktionen $\{1, \sqrt{2}\cos(2\pi n\cdot), \sqrt{2}\sin(2\pi m\cdot) : n, m = 1, 2, 3, \ldots\}$ orthonormal in $L^2(0,1;\mathbb{R})$ ist und dass die Familie $\{e^{2n\pi i\cdot} : n \in \mathbb{Z}\}$ orthonomal in $L^2(0,1;\mathbb{C})$ ist. Zeige ferner, dass $\{e^{2n\pi i\cdot} : n \in \mathbb{Z}\}$ auch total ist, also eine Hilbertraumbasis von $L^2(0,1;\mathbb{C})$ bildet. [4]

   Hinweis: Benutze, dass $\{1, \sqrt{2}\cos(2\pi n\cdot), \sqrt{2}\sin(2\pi m\cdot) : n, m = 1, 2, 3, \ldots\}$ eine Hilbertraumbasis von $L^2(0,1;\mathbb{R})$ ist, und zerlege in Reell- und- Imaginärteil. (s.a. Proposition 6.15)

3. Finde mit dem Ansatz der Trennung der Variablen $u(t,x) = v(t)w(x)$ eine nicht konstante Lösung der Poröse-Medien-Gleichung [4]

   $$u_t(t,x) - \Delta(u^\gamma)(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d,$$

   wobei $u(\cdot,\cdot) \geq 0$ eine positive Funktion sein soll und $\gamma > 1$ eine Konstante ist. Existiert die Lösung für alle $t \geq 0$ oder explodiert sie in endlicher Zeit t^* (d.h. $\lim\limits_{t \to t^*} u(t,x) = \infty$, $x \neq 0$).

   Hinweis: Mache für w den Ansatz $w(x) = (\|x\|_2)^\alpha$, wobei α ein noch zu bestimmender Exponent ist.

4. Betrachte das Eigenwertproblem des Laplace-Operators auf dem Intervall $I = (0,l)$ mit Robin-Randbedingungen, d.h. [4]

   $$\begin{aligned} -f''(x) &= \lambda f(x), && x, \in (0,1), \quad f \in C^2(I) \cap C^1(\bar{I}), \quad \lambda \in \mathbb{C} \\ b_0 f(0) &= f'(0), && b_0 > 0, \\ -b_l f(l) &= f'(l), && b_l > 0. \end{aligned}$$

   Zeige, dass $\lambda \in \mathbb{C}$ nur dann ein Eigenwert sein kann, falls $\lambda > 0$, und dass zwei Eigenfuntionen (d.h. nicht triviale Lösungen obiger Gleichung) zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda \neq \mu$ bezüglich des L^2-Skalarprodukts orthogonal aufeinander stehen.

5. Sei H ein Hilbertraum und $\{x_n \in H : n \in \mathbb{N}\}$ eine orthonomale Familie. Zeige, dass die Reihe $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n$ genau dann in H konvergiert, wenn $\sum\limits_{n \in N} \|x_n\|^2 < \infty$. [4]

6. Es seien $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ Vektorfelder auf $J^0 \approx \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$. Ferner seien $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ infinitesimale Erzeuger von einparametrischen Transformationsgruppen von Symmetrien der Differentialgleichung $H(x, j_k u) = 0$. [4]

   Zeige, dass dann auch das Vektorfeld $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ eine Symmetriegruppe von $H(x, j_k u) = 0$ erzeugt. (Siehe Aufgabe 4 von Blatt 9)

7. Die infinitesimalen Erzeuger der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung sind gegeben durch (siehe Vorlesung) [4]

$$A_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad A_2 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x}, \qquad A_3 = 4t^2\frac{\partial}{\partial t} + 4tx\frac{\partial}{\partial x} - (2t + x^2)u\frac{\partial}{\partial u},$$
$$A_4 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad A_5 = 2t\frac{\partial}{\partial x} - xu\frac{\partial}{\partial u}, \qquad A_6 = u\frac{\partial}{\partial u}.$$

Bestimme die Kommutatoren $[A_i, A_j]$, $i, j = 1, \ldots, 6$.

8. Es habe $H(x, j_k u)$ vollen Rang für alle $(x, j_k u) \in J^k$ mit $H(x, j_k u) = 0$ und sei A der Erzeuger einer einparametrischen Transformationsgruppe auf $J^0 \approx \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$. Zeige, dass die Bedingung $((j_k A)H)(x, j_k u) = 0$ für alle $(x, j_k u) \in J^k$ mit $H(x, j_k u) = 0$ äquivalent ist zur Existenz einer Funktion $Q : J^k \mapsto \mathbb{R}$, die $((j_k A)H)(x, j_k u) = Q(x, j_k u)H(x, j_k u)$ für alle $(x, j_k u) \in J^k$ erfüllt. [4]

   Hinweis: Zeige die Behauptung zuerst lokal (siehe dazu Theorem 5.21 aus der Vorlesung) und benutze dann eine Zerlegung der Eins.