Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
R. Pröpper
WS 2010/2011
Gesamt: 16

Übungen zu Partielle Differenzialgleichungen

Blatt: 11

Abgabetermin: Montag, 17.1.2011 in der Vorlesung

1. Sei H ein Hilbertraum und A_1, A_2 abgeschlossene, konvexe Teilmengen von H. Bezeichne mit P_1 bzw. P_2 die orthogonalen Projektionen auf A_1 bzw. A_2. Beweise, dass folgende Aussagen äquivalent sind: [4]

   i) $P_1 A_2 \subset A_2$,

   ii) $P_2 A_1 \subset A_1$,

   iii) P_1 und P_2 kommutieren, d.h. $P_1 P_2 x = P_2 P_1 x$ für alle $x \in H$.

   (Allgemein: Warum betrachtet man stets abgeschlossene und konvexe Mengen?)

2. Definiere A_1 bzw. $A_2 \subset L^2(\mathbb{R})$ als die Menge aller quadratintegrierbaren Funktionen, die fast überall gerade bzw. positiv sind. [4]

   (a) Zeige, dass A_1, A_2 abgeschlossene, konvexe Teilmengen von $L^2(\mathbb{R})$ sind.

   (b) Zeige, dass die orthogonalen Projektionen P_{A_1}, P_{A_2} auf A_1, A_2 gegeben sind durch

   $$P_{A_1} f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad \text{und} \qquad P_{A_2} f(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} \qquad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R}.$$

3. Sei H ein Hilbertraum und Y ein abgeschlossener Unterraum von H. [4]

   (a) Sei $Y \neq \{0\}$. Zeige, dass dann für die orthogonale Projektion P_Y von H auf Y gilt: $\|P_Y\| = 1$ und $\mathrm{Ker} P_Y = Y^\perp$.

   (b) Zeige, dass jedes $x \in H$ eine eindeutige Zerlegung $x = y + z$ hat, wobei $y = P_Y x \in Y$ und $z = P_{Y^\perp} x \in Y^\perp$.

4. Finde mittels der Methode der Trennung der Variablen eine Reihendarstellung der Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf dem Intervall $(0, l)$ mit den Randbedingungen $f(0) = 0$ und $-f(l) = f'(l)$. [4]