ulm university universität uulm

Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
R. Pröpper
WS 2010/2011
Gesamt: 16

Übungen zu Partielle Differenzialgleichungen

Blatt: 12

Abgabetermin: Montag, 24.1.2011 in der Vorlesung

1. Sei H ein Hilbertraum und A eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge von H. [4]
   (a) Zeige, dass die Projektion P_A genau dann linear ist, wenn A ein Unterraum von H ist.
   (b) Zeige, dass P_A Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante 1.

2. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Sei $f \in L^2(I)$. Zeige, dass die schwache Ableitung von f eindeutig ist, d.h. es existiert höchstens ein $g \in L^2(I)$ mit [4]

$$\int_I f(x)\overline{h'(x)}\,dx = \int_I g(x)\overline{h(x)}\,dx \qquad \text{für alle } h \in C_c^1(I).$$

   Hinweis: Benutze, dass $C_c^1(I)$ dicht in $L^2(I)$ liegt.

3. Zeige, dass $C^0(0,1)$, versehen mit der L^2-Norm $\|f\|^2 = \int_0^1 f^2(x)\,dx$, und $C^1(0,1)$, versehen mit der H^1-Norm $\|f\|^2 = \int_0^1 f^2(x) + (f'(x))^2\,dx$, keine Hilberträume sind. [4]

4. Sei $I = (a,b)$ ein Intervall. [4]
   (a) Sei $f \in L^2(I)$ derart, dass $\int_I f(x)h'(x)dx = 0$ für alle $h \in C_c^1(\overline{I})$. Zeige, dass $f(x) = c$ für fast alle $x \in I$, wobei $c \in \mathbb{K}$ eine Konstante ist.
   (b) Sei $g \in L^2(I)$. Definiere $G : I \ni x \mapsto \int_a^x g(t)dt \in \mathbb{K}$. Zeige, dass $G \in C(I)$ und $\int_I G(x)h'(x)dx = -\int_I g(x)h(x)dx$ für alle $h \in C_c^1(I)$.
   (c) Folgere, dass jedes $f \in H^1(I)$ einen stetigen Repräsentanten $\tilde{f} \in C(\overline{I})$ hat, d.h. $f(x) = \tilde{f}(x)$ für fast alle $x \in I$.
   Ferner gilt für $I = (0,1)$: $\|f\|_{C(\overline{I})} \le \|f\|_{H^1(I)}$ für alle $f \in C([0,1])$.