ulm university universität uulm

Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
R. Pröpper
WS 2010/2011

Gesamt: 16

Übungen zu Partielle Differenzialgleichungen

Blatt: 15

Abgabetermin: Montag, 14.2.2011 in der Vorlesung

1. Finde die Lagrange-Funktion (a) zur konvektiven Poisson-Gleichung und (b) zur modifizierten Wärmeleitungsgleichung [4]

$$(a) \quad \Delta u(x) + \nabla\phi(x)\nabla u(x) = f(x) \qquad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, \quad \phi, f : \Omega \mapsto \mathbb{R},$$

$$(b) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \epsilon\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (t,x) \in (0,\infty)\times\Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad \epsilon > 0.$$

2. (a) Überprüfe, dass die mit der Lagrange-Funktion [4]

$$L(x,y,z,j_1u) := u_x^2(x,y,z) + u_y^2(x,y,z) - u_z^2(x,y,z) + F(u(x,y,z)), \quad F(\cdot) = \int_0^{\cdot} f(z)\,dz,$$

assoziierte Euler-Lagrange-Gleichung eine nichtlineare Wellengleichung ist.

(b) Zeige, dass die Lösung $u : (0,\infty)\times(0,1) =: \Omega \mapsto \mathbb{R}$ der eindimensionalen Wellengleichung ($u_{xx} - u_{tt} = 0$) mit Neumann-Randbedingungen ($u_x(t,0) = u_x(t,1) = 0$) und Anfangswerten $u(0,\cdot) = u_0(\cdot)$, $u_t(0,\cdot) = u_1(\cdot)$ nicht notwendiger Weise ein Minimum des entsprechenden Lagrange-Funktionals $I(u) = \int_\Omega (u_x^2(t,x) - u_t^2(t,x))\,d(t,x)$ ist, d.h. finde Anfangswerte u_0, u_1 und eine Funktion w, die Rand- und Anfangsbedingungen erfüllt und für die $I(w) < I(u)$ gilt.

3. Sei $p \in (1,\infty)$ und betrachte das Lagrange-Funktional [4]

$$I(u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^p\,dx, \qquad u \in H_0^1(\Omega).$$

Zeige, dass die assoziierte Euler-Lagrange-Gleichung die p-Laplace-Gleichung

$$\nabla(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0$$

ist und dass die Abbildungen

$$T_\epsilon : \quad x \mapsto e^\epsilon x, \qquad u(x) \mapsto e^{\epsilon\frac{n-p}{p}} u(e^\epsilon x), \qquad \epsilon \in \mathbb{R},$$

eine variationelle Symmetrie erzeugen.
Leite ferner die zu T_ϵ gehörige Noethersche Divergenzgleichung

$$\sum_{k=1}^d \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\phi(x,j_1u)\frac{\partial L}{\partial u_{x_k}}(x,j_1u(x)) - L(x,j_1u(x))\xi_k(x,j_1u)\right) = 0,$$

$$\phi(x,j_1u) := \frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0}\left(e^{\epsilon\frac{n-p}{p}}u(e^\epsilon x)\right), \quad \xi_k(x,j_1u) = \frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} e^\epsilon x,$$

her und überprüfe auch direkt, dass diese aus der p-Laplace-Gleichung folgt.

4. Betrachte die zweidimensionale Wellengleichung $u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0$. Die Vektorfelder $\mathbf{r}_{xy} := -y\partial_x + x\partial_y$ (Rotation) und $\mathbf{d} := x\partial_x + y\partial_y + t\partial_t$ (Dilatation) erzeugen einparametrische Symmetriegruppen der Wellengleichung. [4]

Untersuche, ob sie auch variationelle Symmetrien erzeugen.