Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
R. Pröpper
WS 2010/2011

Gesamt: 16

Übungen zu Partielle Differenzialgleichungen

Blatt: 2

Abgabetermin: Montag, 03.11.2010 in der Vorlesung

1. Die Methode der Charakteristiken eignet sich auch für Transportgleichungen mit nicht konstantem Koeffizienten. Wir betrachten das Anfangswertproblem [4]

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= -x u_x(t,x), \qquad t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) &= u_0(x). \end{aligned}$$

   Bestimmen Sie die Charakteristiken für diese Transportgleichung und finden Sie die Lösung des Anfangswertproblems.

2. Betrachte das Anfangs-Randwertproblem für die Transportgleichung auf dem Intervall $[0,1]$ [4]

$$u_t(t,x) = -c u_x(t,x), \qquad t \geq 0,\ x \in [0,1]$$

   mit Anfangswert $u(0,x) = u_0(x)$, $x \in [0,1]$.
   Bestimmen Sie die Lösungen für folgende Randbedingungen. Welche Forderungen sind an den Anfangswert u_0 bei diesen Randbedingungen zu stellen?

   a) Periodische Randbedingungen: $u(t,0) = u(t,1)$, $t \geq 0$;
   b) Dirichlet-Randbedingungen ($c > 0$): $u(t,0) = 0$, $t \geq 0$;
   c) Periodische und Dirichlet-Randbedingungen: $u(t,0) = u(t,1) = 0$, $t \geq 0$.

3. Finden Sie die Lösungen der inhomogenen Transportgleichung [4]

$$u_t(t,x) = 2u_x(t,x) + tx^2, \quad t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

4. Leiten Sie, den eindimensionalen Fall imitierend, die Lösungsformel für die Transportgleichung im $\mathbb{R}^d$ [4]

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= -b \cdot \nabla u(t,x) + f(t,x), \quad t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^d, \\ u(0,x) &= u_0(x) \end{aligned}$$

   her, wobei $b \in \mathbb{R}^d$ ein konstanter Vektor und $\nabla u(t,x) := (u_{x_1}(t,x), \ldots, u_{x_d}(t,x))$ ist.